I. rész

1. *Milyen α valós paraméter esetén lesz a következő egyenletnek egy megoldása?*

$$\frac{x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0.$$

(*11 pont*)

Megoldás. A nevezőben nem állhat nulla, tehát $x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Egy tört akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, vagyis

$$x^2\cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek akkor lesz pontosan egy megoldása, ha

a) Nem másodfokú az egyenlet, vagyis a másodfokú tag együtthatója nulla. Ekkor $\cos\alpha = 0$, azaz

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (\text{ahol } k \in \mathbb{Z}).$$

Ekkor

$$x + \frac{1}{2}\sin\alpha = 0,$$

melyre

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{esetén} \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \\ \alpha_2 &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{esetén} \quad x_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Másodfokú az egyenlet ($\cos\alpha \neq 0$), s ekkor az egyenlet diszkriminánsa nulla. Ebből

$$1 - 4\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha = 0,$$

vagyis $\sin 2\alpha = 1$ adódik. Ennek gyökei $\alpha = \frac{\pi}{4} + l\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$. A paraméter ezen értékei azonban nem felelnek meg a feltételeknek, hiszen $\alpha = \frac{\pi}{4}$ esetén $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ esetén $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ adódik.

Tehát az egyenletnek csak $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ esetén lesz egy valós gyöke.

2. *Óvodás korú kisöcsénk a játék rulett-zsetonokat használja toronyépítésre. Az első korongoszlop mellé magasabbat állít, majd a következőket ugyanannyival növeli, mint a korábbiakat. Így egy lépcsős toronysorozatot hoz létre mackójának.*

a) *Milyen sorozatot alkotnak a tornyok magasságai?*

b) *Az első toronytól kezdve csoportosítsuk a tornyokat hármasával. Igazoljuk, hogy a hármas csoportokban szereplő tornyok magasságainak összege számtani sorozatot alkot.*

c) *A sorba rendezett tornyok elejéről kisöcsénk elvett n darab tornyot, majd megszámoltatta velünk, hogy hány zsetonja van összesen. Ezután elvett még n* db *tornyot, s ismét megkérdezte, hogy az előzővel együtt most hány zsetonja is van. Ebből a két adatból meg tudnánk-e mondani, hogy még n tornyot elvéve, hány zsetonunk is lesz az előzőkkel együtt?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a szomszédos tornyok magasságai ugyanannyival növekednek, ezért számtani sorozatot alkotnak. (Ez a számtani sorozat definíciója.)

b) Jelölje az *a*)-beli sorozat általános tagját a_n, differenciáját pedig d. Ekkor az új sorozat egy általános elemét így írhatjuk fel:

$$b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3\cdot a_{3n} - 3d = 3a_1 - 6d + n\cdot 9d.$$

Ebből kiolvasható a számtani sorozat definíciója, a $9d$-s állandó növekedés. Vagy igazolhatjuk az állítást a

$$2b_n = b_{n-1} + b_{n+1}, \quad 2(3\cdot a_{3n} - 3d) = (3a_{3n} - 12d) + (3a_{3n} + 6d)$$

összefüggéssel is.

c) Legyen

$$s_n = b = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = a_1 n + \frac{(n-1)nd}{2},$$
$$s_{2n} = c = \frac{2a_1 + (2n-1)d}{2} \cdot 2n = 2a_1 n + \frac{(2n-1)2nd}{2},$$
$$s_{3n} = \frac{2a_1 + (3n-1)d}{2} \cdot 3n = \frac{6a_1 n + (3n-1)3nd}{2} = 3a_1 n + \frac{9n \cdot nd}{2} - \frac{3nd}{2}.$$

Ekkor
$$c - b = a_1 n + \frac{3n \cdot nd}{2} - \frac{nd}{2},$$
amiről látható, hogy éppen az s_{3n} harmada. Tehát $s_{3n} = 3(c-b)$.

3. *Az A halmaz elemei olyan 100-nál kisebb pozitív a egészek, melyekre* $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0{,}5$. *A B halmaz elemei a 100-nál kisebb hattal osztható természetes számok.*

a) $|A| = ?$ $\quad|B| = ?$

b) *Definiáljuk a C halmazt a következőképpen: $C := \{1; 2; 3; 6; A\}$, ahol az A halmaz a C eleme.* $|C \setminus B| = ?$

c) *Hány páros elemű részhalmaza van C-nek?* *(14 pont)*

Megoldás. *a*) A $\sin(a \cdot 10^\circ) = 0{,}5$ egyenlet megoldásai

$$a \cdot 10^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \qquad \text{illetve} \qquad a \cdot 10^\circ = 150^\circ + l \cdot 360^\circ,$$

melyekből a 100-nál kisebb a értékek a 3, 39, 75, illetve 15, 51, 87. Tehát $|A| = 6$.

A B halmaz elemei: $0, 6, 12, \ldots, 96$. Tehát $|B| = 17$.

b) $C \setminus B = \{1; 2; 3; A\}$, tehát $|C \setminus B| = 4$.

c) Az öt elemű C halmaznak a páros elemű részhalmazai a 0, 2, illetve 4 eleműek. Ezekből rendre $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{4}$ van, ami összesen $1 + 10 + 5 = 16$ darab.

4. *A Balaton valósághű modelljét szeretnénk elkészíteni. Az adatok szerint a Balaton hossza* 77 km, *felszíne* 594 km^2, *átlagos mélysége* 3,6 m, *legmélyebb pontja* 11 m.

a) *Hány centiméter mélyen lesz a modellünk legmélyebb pontja a felszínhez képest, ha annak hossza a terepasztalon* 1 m?

b) *Mennyi a modellünk léptéke (méretaránya)?*

c) *Hány centiliter víz kell a modellhez, ha azt valóban vízzel szeretnénk feltölteni?*

d) *A Balatont egy helikopterről fentről is megtekintjük, hogy lássuk, mennyire hasonlít a modellünkre. A tó két legtávolabbi, egymástól* 77 km*-re lévő pontját nézzük hossztengelyére merőlegesen, középpontja felé repülve.* 4 km *távolságban,* 900 m *magasról mekkora szögben látjuk a tavat?* *(14 pont)*

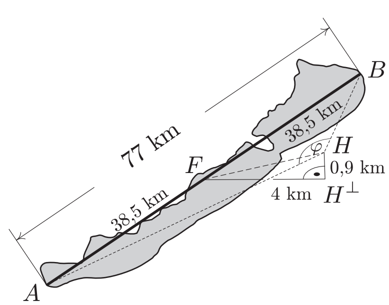
Megoldás. *a*) A megfelelő hosszúságok arányát felírva

$$\frac{h}{11 \text{ m}} = \frac{1 \text{ m}}{77 \text{ km}} = \frac{1 \text{ m}}{77\,000 \text{ m}}, \quad \text{amiből} \quad h = \frac{11 \text{ m}}{77\,000} \approx 0{,}0143 \text{ cm} \quad \text{adódik.}$$

b) Az előző részben felírt megfelelő hosszúságok aránya a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{1}{77\,000}$. Tehát a lépték $1 : 77\,000$.

c) A Balatonban $V = 594 \cdot 10^6 \cdot 3{,}6\ (\text{m}^3)$ víz van. A modellben $V' = \lambda^3 \cdot V \approx 0{,}468$ cl víz van.

d) Legyen a Balaton két legtávolabbi pontja A és B, a közepe F. Az AB szakaszra merőlegesen érkező helikopter a 0,9 km magasan lévő H pontból nézi az AB távolságot, a H pont merőleges vetülete a Balaton síkjára $H^\perp$. A feladat az $AHB\sphericalangle$ szög meghatározása.



Az $FHH^{\perp}\triangle$ derékszögű, így
$$\overline{FH}=\sqrt{4^2+0{,}9^2}=4{,}1 \text{ km}.$$
$FH\perp FB$, és így $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{FB}{FH}$, tehát $\varphi\approx 167{,}84°$.

II. rész

5. *Egy bank a következő ajánlattal kívánja ügyfelei körét bővíteni: aki a megadott határidőig pénzét áthozza a fiókba fél éves lekötéssel, az első hat hónapban évi* 5% *kamatot kap. Az* apró betűs rész *elolvasva megtudhatjuk, hogy fél év után havi lekötéssel, évi* 1,5% *kamattal marad a fiókban a pénzünk. (A havi lekötés azt jelenti, hogy amennyiben előbb vesszük ki a pénzünket, a teljes kamatot elveszítjük a csonka hónapra.)* 1 *millió forintot teszünk be a bankba. Ezen feltételek ismeretében válaszoljunk a következő kérdésekre:*

a) Mennyi pénzünk lesz fél év múlva?

b) Mennyit kamatozott egy év alatt a betett 1 *millió forintunk?*

c) Korábbi bankfiókunkban hagyva a pénzünket évi 2%*-os a kamatot kapnánk havi lekötés mellett. Legfeljebb mennyi időre éri meg áthozni a pénzünket az új helyre?* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Fél év alatt 5% kamattal kell számolni, de nem a teljes évre, csupán feleannyi időre. Így $1\,000\,000\cdot(1+0{,}05)^{\frac{1}{2}}$, vagyis egészre kerekítve 1 024 695 Ft-unk lesz.

b) A teljes évre a kamat:
$$(1+0{,}05)^{\frac{1}{2}}\cdot(1+0{,}015)^{\frac{1}{2}}\approx 1{,}032\,4,$$
tehát kb. 3,24% a kamat a teljes évre.

(A második félévben már csak 1,5% volt a kamat, így $1\,024\,695\cdot(1{,}015)^{\frac{1}{2}}\approx 1\,032\,352$ forintunk lett.)

b) A feladat megállapítani, hogy hány évre érdemes áthozni a pénzünket a feltételeknek megfelelően. (Feltételezzük, hogy a két bank egyéb költségei nem különböznek, és így csak a hűségidőn múlik, hogy érdemes-e átmenni egyik bankból a másikba.)
$$1\,000\,000\cdot 1{,}02^n=1\,000\,000\cdot 1{,}05^{\frac{1}{2}}\cdot 1{,}015^{n-\frac{1}{2}},$$
$$\left(\frac{1{,}02}{1{,}015}\right)^n=\left(\frac{1{,}05}{1{,}015}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$n=\frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1{,}05}{1{,}015}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}02}{1{,}015}\right)}\approx 3{,}45.$$
Tehát kb. három és fél évnél kevesebb időtartam esetén megéri áthozni a pénzt az új feltételeknek megfelelően. (Vagyis hosszabb időre nem éri meg áthozni a pénzünket.)

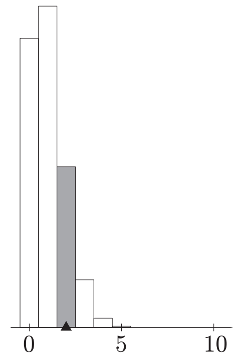
6. *Ugorjunk másfél évet. Az egyetemek új előírása miatt a* 2017*-es érettségin igen sokan választották a matematikát emelt szinten.* 10%*-uknak* 90% *feletti lett az eredménye.*

a) Az emelt szinten érettségiző diákok közül véletlenszerűen megkérdezve 10*-et mekkora annak az esélye, hogy közülük pontosan ketten* 90% *feletti érettségit tettek?*

b) Internetes felmérésen 100 *diákot kérdeztek meg véletlenszerűen az emelt szinten érettségizők közül. Mekkora a valószínűsége, hogy legfeljebb* 2*-en vizsgáztak* 90% *feletti eredménnyel? És annak, hogy a* 100 *megkérdezett diákból legfeljebb ketten vannak azok, akiknek nem sikerült* 90% *felett az eredményük?*

c) (Az emelt szinten túlmutató kérdés.) Az OH statisztikájában kutakodunk. A 40 000 *emelt szintű vizsgázó eredményét tekintve* 90%*-os biztonsággal hány* 90% *feletti eredményes vizsgázóra számíthatunk?* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Az érettségizők nagy száma miatt binomiális eloszlással számolhatunk. A visszatevéses urna-modell szerint 0,1 valószínűséggel választhatjuk ki a 90% feletti tanulókat, s a maradék nyolcat 0,9 valószínűséggel. Ezen tanulókat pedig $\binom{10}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Eszerint
$$P(X=2)=\binom{10}{2}\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}1^2\approx 0{,}1937.$$
Tehát kb. 19,37% annak az esélye, hogy pontosan két 90% feletti eredményű tanulót találunk az adathalmazban.

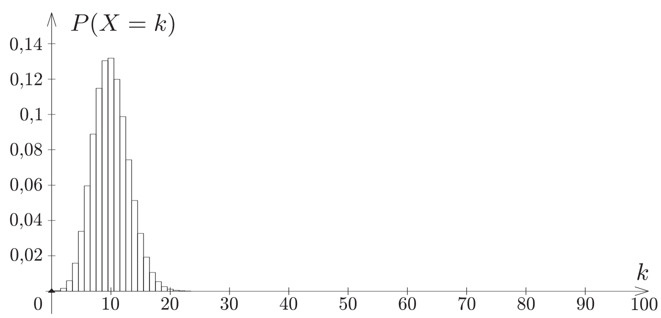


(A grafikonról jól látszik, hogy a legnagyobb esélye annak lenne, hogy egy tanulót találunk, aki a feltételnek megfelel.)

b) Annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt nyújtó diákot találjunk, azzal egyezik meg, hogy pontosan kettő, vagy pontosan egy, illetve egy ilyen diákot sem találunk a 10 tanuló között.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{100}{i} \cdot 0{,}9^{100-i} \cdot 0{,}1^{i} \approx$$
$$\approx 0{,}000\,027 + 0{,}000\,295 + 0{,}001\,623 = 0{,}001\,945.$$

Tehát annak az esélye, hogy legfeljebb két 90% feletti eredményt író tanulót találunk, kb. 0,19%, közel nulla. (Ez a lenti grafikonon is jól leolvasható, a görbe bal széle.)

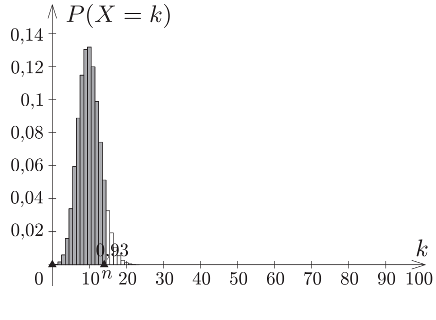


Annak az esélye, hogy legfeljebb két olyan diákot találjunk, akiknek nem sikerült 90% felett az érettségijük, megegyezik azzal, hogy 0, 1 vagy 2 ilyen diák van.

$$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{100}{i} \cdot 0{,}1^{100-i} \cdot 0{,}9^{i} \approx 0.$$

c) A feladat szerint nem szeretnénk nagyon hibázni, 90% biztonsággal akarjuk meghatározni azon vizsgázók számát, akik 90%-nál jobban teljesítettek. A kérdés tehát az, hogy legfeljebb hány ilyen tanulóra számíthatunk 90%-os biztonsággal.

Az előző grafikonokból is jól látszik, hogy eszerint azt az n értéket keressük, melynél kisebb n-ekre az oszlopok területe a teljes grafikon területének 90%-a lesz. Ez a számítás binomiális eloszlással legfeljebb számítógép segítségével (pl. GeoGebra – ld. a GEOMATECH[1] oldalán lévő statisztikai feladatokat) lenne elvégezhető, így közelítsük eloszlásunkat normális eloszlással.



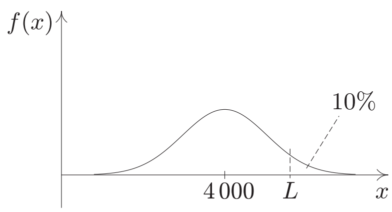
Az eloszlás várható értéke $E(X) = 0{,}1 \cdot 40\,000 = 4\,000$, szórása

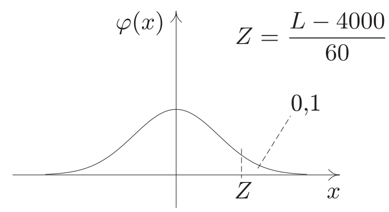
$$D(X) = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 40\,000} = 60.$$

A normális eloszláshoz a görbénket transzformálnunk kell, hogy a jól ismert Gauss-görbét megkapjuk $\left(f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$:

1. toljuk el a maximumát az y-tengelyhez ($E(X)$-szel való eltolás);

2. alakítsuk úgy át, hogy területe 1 legyen (osszuk $D(X)$-szel „belül", hogy merőleges affinitást hajtsunk végre az x-tengely irányában).





Ekkor a görbe alatti integrálás lenne a feladatunk, de „szerencsére" a függvénytáblázat $\Phi(Z)$-táblázatát használva visszakereshetjük, hogy milyen x abszcisszáig integrálva lenne a görbe alatti terület 0,9:

$$P(X \le L) = \Phi\left(\frac{L - 4000}{60}\right) = 0{,}9, \qquad \frac{L-4000}{60} = 1{,}28, \qquad L = 4076{,}8.$$

Tehát elegendő legfeljebb 4 077 tanulót mondani, hogy 90% biztonsággal eltaláljuk, hogy hányan írták meg 90%-nál jobban a dolgozatot.

7. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f függvény:*

$$f\colon x \longmapsto \frac{x}{1 - |x|}.$$

a) Ábrázoljuk a függvényt a $]-1;2] \setminus \{1\}$ intervallumon.

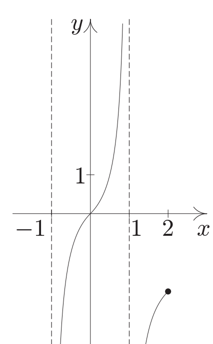
b) Adott a $g(x) = 2x$ függvény. Mi lesz az $f \circ g$ függvény értékkészlete a $]-1;2]$ intervallumon?

c) Határozzuk meg az f függvény inverzét a $]-1;1[$ intervallumon, s ábrázoljuk az f^{-1} függvényt. *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A függvény ábrázolásához bontsuk fel az abszolútértéket:

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1-(-x)} = \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x+1}{x+1} + \dfrac{-1}{x+1} = \dfrac{-1}{x+1} + 1, & \text{ha } x < 0,\ x \ne -1, \\ \dfrac{x}{1-x} = -\dfrac{x-1+1}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} - 1, & \text{ha } x \ge 0,\ x \ne 1. \end{cases}$$

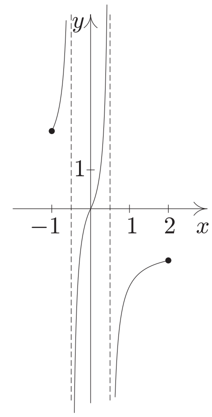
Ezekről az alakokról jól leolvashatók a függvénytranszformációk. A megfelelő intervallumokon ábrázoljuk a függvényeket (*1. ábra*).



1. ábra

[1] http://tananyag.geomatech.hu/.

b) Az $f(x) \to f(2x)$ függvénytranszformáció egy x tengely irányú merőleges affinitásnak felel meg (x tengely irányában történő zsugorítás, *2. ábra*).



2. ábra

Természetesen ezt is meggondolhatjuk az abszolútérték bontásának segítségével:

$$f\colon x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{2x}{1-(-2x)} = \dfrac{x}{\frac{1}{2}+x} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}} + 1, & \text{ha } x<0,\ x \neq -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2x}{1-2x} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} - 1, & \text{ha } x \geq 0,\ x \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ábrázolás nélkül is, az előzőek alapján, látható, hogy a függvény értékkészlete a teljes valós számhalmaz.

c) A függvény a $]-1;1[$ intervallumon kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés, így invertálható.

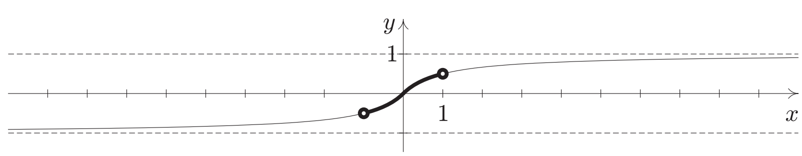
$x<0$ esetén:

$$y = \frac{x}{1+x} \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \quad x = \frac{y}{1+y} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-1}{x-1} - 1.$$

$x \geq 0$ esetén:

$$y = \frac{x}{1-x} \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} \quad x = \frac{y}{1-y} \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-1}{x+1} + 1.$$

A vastagon ábrázolt rész a kért $]-1;1[$ intervallumon értelmezett függvény.



8. *Lakásunk nappali szobája hatszög alakú, melynek oldalai rendre* $AB = 3{,}4$, $BC = 2{,}3$, $CD = 2{,}3$, $DE = 2{,}3$, $EF = 3{,}4$, *valamint* $FA = 3{,}7$ *méteresek. Az* AB *és a* BC, *valamint a* DE *és az* EF *oldalak merőlegesek egymásra. A szoba parkettázásához szeretnénk megállapítani az alapterületét, melyet kétféleképpen teszünk meg.*

Mi megmérjük a szoba AD *átlóját, melyet* $4{,}8$ *méteresnek találunk, míg fiaink a szoba* F *csúcsánál lévő szöget határozzák meg, melyet* 120°*-nak mérnek. A hosszúságot* 5 cm*-es pontossággal, míg a szöget* 5°*-os pontossággal tudjuk eszközeinkkel megmondani.*

a) *A szög vagy a hosszúság relatív hibája nagyobb?*

b) *Mekkorák a területek a két esetben?*

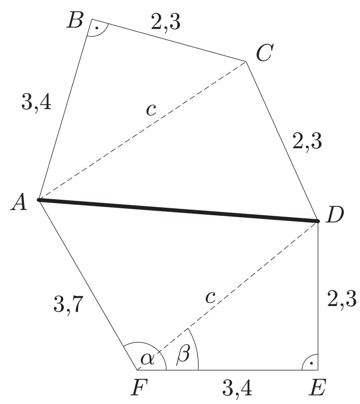
c) *Mennyire pontosan ismerjük a két esetben az* AD *átlót?*

d) *Melyik mérést fogadjuk el inkább?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy a hosszúság abszolút hibája: $H(\overline{AB}) = 0{,}05$ m. A relatív hibája: $R(\overline{AB}) = \dfrac{0{,}05}{4,8} \approx 0{,}01$, vagyis közelítőleg 1%. A szög esetén: $H(AFE\sphericalangle) = 5^\circ$, $R(AFE\sphericalangle) = \dfrac{5}{120} \approx 0{,}04$, ami 4%. Tehát a szög relatív hibája a nagyobb.

b) Készítsük el a szoba vázlatrajzát. Az *ábrán* látható c oldalt Pitagorasz-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$c = \sqrt{2{,}3^2 + 3{,}4^2} \approx 4{,}1.$$



Az első esetben a ABC és DEF háromszögek területét két befogójuk segítségével, míg a két belső háromszög területét Heron-képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$T = 2 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 3{,}4}{2} + \sqrt{5{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}3 \cdot 1{,}5} + \\ + \sqrt{6{,}3 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}2 \cdot 1{,}5} \approx 19{,}88 \text{ m}^2.$$

A második esetben az α szög segítségével határozzuk meg AD hosszúságát (koszinusz-tétel). Az FED háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{2,3}{3,4}$, amiből $\beta \approx 34{,}08°$.

$$AD = \sqrt{3{,}7^2 + c^2 - 2 \cdot 3{,}7 \cdot c \cdot \cos(\alpha - \beta)} \approx 5{,}33.$$

Ezután a területeket hasonlóképpen határozhatjuk meg:

$$T' = 2 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 3{,}4}{2} + \sqrt{5{,}1 \cdot 1{,}27 \cdot 2{,}8 \cdot 1} + \sqrt{8{,}815 \cdot 1{,}715 \cdot 2{,}115 \cdot 1{,}985} \approx 18{,}38 \text{ m}^2.$$

c) A hosszmérést ± 5 cm hibával végezhetjük, ezért 475 cm $< AD <$ 485 cm, a szöggel való számolásnál 530 cm-t kaptunk, tehát biztosan sokkal pontatlanabb ez az adat.

d) A két esetben – a hibaszámítás tekintetében – azonos műveletsorozatokat hajtunk végre az AD átlón, így a második esetben nagyobb hibával ismerjük a területet, mint az elsőben.

9. *A mérnökök egy gépkocsi mozgását figyelték műszerek segítségével négy másodpercen át. A pillanatnyi sebességek* (m/s-*ban*) *mért adataira a számítógép a következő függvényt illesztette:*

$$v(t) = 2{,}5t^3 - 16t^2 + 33t + 5.$$

a) *Mekkora sebességre gyorsult fel az autó az első másodperc végére?*

b) *A sebességváltás pillanatában nem gyorsult az autó. Mikor volt ez?*

c) *A gépkocsi pillanatnyi fogyasztását (centiliterben mérve) a következő függvény írja le:*

$$F(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(v'(t) + 50t\big).$$

Hány centiliter üzemanyag fogyott az első két másodperc alatt? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első másodperc végére

$$v(t) = 2{,}5 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1^2 + 33 \cdot 1 + 5 = 24{,}5 \text{ (m/s)},$$

azaz 88,2 km/h sebességre gyorsult fel.

b) Amikor az autó nem gyorsul, akkor a Δt idő alatti sebességváltozása nulla. Ezek szerint a sebesség deriváltjának nullahelyét keressük.

$$v'(t) = 7{,}5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 = 0.$$

Ennek nullahelyei $t_1 = 1{,}745$ s-nál, illetve $t_2 = 2{,}522$ s-nál vannak. Ekkor nem gyorsult az autó, tehát ekkor lehettek a sebességváltás pillanatai. (Ehhez automata sebességváltót lehet elképzelni, mellyel a Forma-1 pilótái versenyeznek.)

c) A megadott függvény a gépkocsi pillanatnyi fogyasztását adja meg. Az első két másodperc alatt a gépkocsi fogyasztását ennek a függvénynek a $[0; 2]$ intervallumon vett határozott integrálja adja meg.

$$\int_0^2 F(t)\,dt = \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(v'(t) + 50t\big)\,dt = \\ = \int_0^2 2 \cdot 10^{-2} \cdot \big(7{,}5 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 33 + 50t\big)\,dt = \\ = 2 \cdot 10^{-2} \left[7{,}5\frac{t^3}{3} + 18\frac{t^2}{2} + 33t\right]_0^2 = 2{,}44 \text{ (cl)}.$$