I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a $3 \cdot 25^x - 16^x = 2 \cdot 20^x$ egyenletet!

2. Melyek azok az $n \in \mathbb{N}$ számok, amelyekre $2^{2n+2} \cdot 3^{2n} + 1$ prímszám?

3. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Igazolja, hogy a háromszög az egyik csúcsán átmenő két egyenessel három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a kapott részek területének mérőszáma is egész szám!

4. Az ABC háromszögben $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ hosszúságú és az oldalak hosszaira teljesül, hogy $a^3 + b^3 = c^3$. Bizonyítsa be, hogy $60^\circ < BCA\sphericalangle < 90^\circ$!

5. Egy egységnyi oldalú négyzet csúcsai A; B; C; D. Az AB oldal tetszőleges pontja P. A Q pont a BC oldalon van, és $PDQ\sphericalangle = 45^\circ$. Mekkora a PBQ háromszög kerülete?

6. Egy 5×5-ös táblázat minden sorába és minden oszlopába pontosan egyszer beírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat. A táblázatba beírt számok a táblázat egyik átlójára szimmetrikusan helyezkednek el. A feltételeknek megfelelő kitöltés esetén mennyi lehet a táblázat szimmetriaátlójában levő számok összege?

Második forduló

1. A 257 olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek. Ha a számjegyeket fordított sorrendben leírjuk, akkor az eredetinél nagyobb számot kapunk, a 752-t. Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű szám van?

2. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az

$$\left|\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

egyenletnek pontosan egy valós megoldása?

3. Messe az AB átmérőjű k_1 kört a C és D pontokban az A középpontú k_2 kör. A k_2 körnek az AB átmérőre eső pontja legyen E! Válasszuk ki a k_2 körnek az ABC háromszög belsejébe eső CE körívén az ív egy tetszőleges M belső pontját! A BM egyenes és a k_1 kör másik metszéspontját jelöljük N-nel! Bizonyítsa be, hogy $MN^2 = CN \cdot DN$!

4. Milyen a valós paraméter esetén lesz pontosan két valós gyöke a

$$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - (a+2) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2a = 0$$

egyenletnek a $[0; 2\pi]$ intervallumban?

5. Az $ABCD$ tetraéder belsejében vegyünk fel egy P pontot, majd kössük össze a tetraéder csúcsaival. Az AP; BP; CP és DP egyenesek szemközti oldallapokon lévő döféspontjai rendre: A_1; B_1; C_1 és D_1. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = 1!$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Az a_n számsorozat tagjaira teljesül, hogy $a_0 = 5$, és minden $n \geq 1$ pozitív egész számra

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{1 - a_{n-1}}.$$

Határozza meg az a_{2014} szám értékét!

2. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 17$, $BC = 8$. A P pont a CD oldalon, C-től m hosszúságegységre, a Q pont a CB oldalon, C-től n hosszúságegységre van. Legyen R a P pontból az AB- re húzott merőlegesnek az AB oldalon levő talppontja, legyen továbbá $APR\sphericalangle = \alpha$, $QAB\sphericalangle = \beta$. Határozza meg mindazokat a pozitív egészekből álló m; n számpárokat, amelyekre $\alpha - \beta = 45^\circ$!

3. Egy ABC háromszögben $AC = BC = a$ és $ACB\sphericalangle = 90^\circ$. Az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja H. Határozza meg az AB oldalon az E, a BC oldalon az F pontot úgy, hogy az EFH háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen! Adja meg ennek a minimális kerületnek a nagyságát és a $\frac{BF}{FC}$, illetve $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a $p+q$, $p+q^2$, $p+q^3$, $p+q^4$ számok mindegyike prím?

2. Határozzuk meg, a p valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek: $\left|\sqrt{|x-3|}-2\right|-1=p$.

3. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melyben a jegyek szorzata 50-re végződik?

4. Jelölje M a hegyesszögű ABC háromszög magasságpontját. Legyen P, Q és R rendre a BCM, CAM és ABM háromszögek köré írt köreinek középpontja.
(a) Igazoljuk, hogy ABC és PQR egybevágó háromszögek.
(b) Igazoljuk, hogy az AP, BQ és CR egyenesek egy pontra illeszkednek.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3} > 1 + 2\cdot \operatorname{tg} x.$$

Második forduló

1. Maximum hány egész számot választhatunk ki a $J=\{n \mid 1<n<121;\ n\in\mathbb{Z}\}$ halmazból úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen, ha egyikük sem lehet prím?

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2+4\left(\frac{x}{x-2}\right)^2=45.$$

3. Tekintsük az összes olyan parabolát, melyek egyenlete $y=x^2+ax+b$, ahol a és b valós számok, továbbá a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bármely parabola esetén ez a három pont meghatároz egy kört. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen kör átmegy egy közös ponton.

4. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $ABCD$ négyzet köré írt körön adott a P és Q pont úgy, hogy $PAQ\sphericalangle=45^\circ$, továbbá AP és BC metszi egymást az M, AQ és CD az N pontban. Mutassuk meg, hogy a PQ és az MN szakaszok párhuzamosak.

2. Anna és Bori tulipánokat ültetnek egy sorba, n helyre. Ezt a következő játékos formában teszik: felváltva ültetnek egy-egy tulipánt úgy, hogy egymással közvetlenül szomszédos helyekre nem kerülhet tulipán. Anna kezdi a játékot. Az nyer, aki utoljára tud tulipánt ültetni. Kinek van nyerő stratégiája, ha (a) $n=2013$; (b) $n=12$?

3. Legyenek $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{2014}$ 1-nél kisebb pozitív valós számok, melyek szorzata A, valamint legyen $A_i=\dfrac{A}{a_i}$, $i\in\{1;2;\ldots;2014\}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1<\frac{1}{\log_{a_1}(a_1a_2)}+\frac{1}{\log_{a_2}(a_2a_3)}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014}a_1)}<$$
$$<\frac{1}{\log_{A_1}A}+\frac{1}{\log_{A_2}A}+\ldots+\frac{1}{\log_{A_{2014}}A}.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. A P pont végigfut egy kör félkörnél rövidebb AB ívén. Legyen P' a P-vel átellenes pont a körön. Bizonyítsuk be, hogy $AP'\cdot BP'-AP\cdot BP$ állandó.

2. Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?

3. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja, továbbá A_1, B_1 és C_1 a P pont merőleges vetülete rendre a BC, CA, illetve AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy

$$AC_1 \cdot BA_1 + BA_1 \cdot CB_1 + CB_1 \cdot AC_1 = C_1B \cdot A_1C + A_1C \cdot B_1A + B_1A \cdot C_1B.$$

4. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?

5. Legyenek $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 \geq 4n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

Második (döntő) forduló

1. Adott az ABC háromszög. Bocsássunk merőlegest A-ból a B-beli belső szögfelező egyenesre, és B-ből az A-beli belső szögfelező egyenesre. A talppontokat jelölje D, illetve E. Bizonyítsuk be, hogy a DE egyenes a háromszög AC és BC oldalát a beírt kör érintési pontjaiban metszi.

2. A p és q pozitív számokra $p+q \leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m, n pozitív egészekre $(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1$.

3. Az $1, 2, \ldots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?