Amint az jól ismert, egy centrális gravitációs térben egy m tömegű testre (amit nevezzünk bolygónak)

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \boldsymbol{r}$$

erő hat, tehát a mozgásegyenlete

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma \frac{mM}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{1}$$

ahol M a centrumban elhelyezkedő tömeget, $\boldsymbol{r}$ a mozgó test helyvektorát, γ pedig a Newton-féle gravitációs állandót jelöli.[1]

Az (1) egyenlet megoldása *ellipszis, parabola* vagy *hiperbola* attól függően, hogy a mozgó test teljes

$$E = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{1}{2} m (\dot{\boldsymbol{r}})^2 \tag{2}$$

energiája *negatív, nulla* vagy *pozitív*, és az adott kúpszelet (egyik) fókusza éppen a centrumba esik. Ellipszispálya esetén a bolygó keringési ideje

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}},$$

ahol a az ellipszis nagytengelyének a fele. Ez a leírás (mivel rögzített vonzócentrumot és egyetlen bolygót feltételez) eléggé idealizált, ennek ellenére nagyon pontosan írja le pl. a Naprendszerünk bolygóinak a mozgását. Ennek az az oka, hogy a Naprendszer összes tömegének legnagyobb része (99,87%-a) a Napban van, a bolygók pályasugarai pedig eléggé eltérnek egymástól, így a bolygók egymásra gyakorolt tömegvonzása, és az a tény, hogy a Nap maga is a közös tömegközéppont körül mozog, csak igen kicsi korrekciót okoz.

A következőkben két olyan esetet tárgyalunk meg részletesen, amelyekben ezek a feltételek nem teljesülnek: megvizsgáljuk, hogyan mozog két közel azonos tömegű égitest (ikercsillag) egymás gravitációs terében, és bemutatjuk a gravitációs háromtest-probléma egy igen speciális, de nagyon szép esetét.

Az ikercsillagok mozgása

Tegyük fel, hogy a két égitestre egymáson kívül nem hat semmi! Ekkor nyilván a közös tömegközéppont körül mozognak, ezért érdemes a koordináta-rendszerünk origóját ehhez a ponthoz rögzíteni. Ez az impulzusmegmaradás miatt inerciarendszer. Legyen a két tömeg m_1 és m_2, a helyvektorok pedig $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$! A koordináta-rendszer választásunkból következik, hogy a mozgás során minden pillanatban

$$m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 = 0 \qquad \text{és} \qquad m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2 = 0.$$

Ebben a koordináta-rendszerben tehát csak olyan kezdeti feltételnek van értelme, amely a fenti egyenleteknek megfelel, és tulajdonképpen csak egy független koordinátánk van. Mivel az erőtörvényben a két test távolsága szerepel, független változónak érdemes pl. az $\boldsymbol{r}_{1,2} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ vektort választani ($|\boldsymbol{r}_{1,2}| = r_{1,2} = r_1 + r_2$). Ennek segítségével a két mozgásegyenlet

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\gamma \frac{m_2}{(r_{1,2})^3} \boldsymbol{r}_{1,2} \qquad \text{és} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \gamma \frac{m_1}{(r_{1,2})^3} \boldsymbol{r}_{1,2},$$

melyeket kivonva egymásból az

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 + m_2}{(r_{1,2})^3} \boldsymbol{r}_{1,2}$$

egyenletet kapjuk, ami (1)-gyel azonos szerkezetű, hiszen

$$\boldsymbol{r}_{1,2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}, \qquad r_{1,2} \Leftrightarrow r, \qquad m_1 + m_2 \Leftrightarrow M$$

helyettesítésekkel a két egyenlet egymásba átírható. Ennek megfelelően a megoldásuk is azonos, vagyis az origóból felmért $\boldsymbol{r}_{1,2}$ vektor végpontja kúpszeletet rajzol le. Annak feltételét, hogy ez milyen kúpszelet, (2)-ből a megfelelő

$$\boldsymbol{r}_{1,2} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}, \qquad m_1 + m_2 \Leftrightarrow M$$

helyettesítéssel kapjuk meg: a pálya *ellipszis, parabola* vagy *hiperbola,* ha a

$$-\gamma \frac{m_1 + m_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{r}}_{1,2})^2$$

[1] A cikkben azt a gyakorlatot követjük, hogy egy vektort és annak nagyságát ugyanaz a szimbólum jelöli, csak a vektort magát félkövér karakterrel szedjük; így pl. r az $\boldsymbol{r}$ vektor nagysága. Egy mennyiség jele fölé tett pont a mennyiség időbeli változásának ütemét jelzi, így $\dot{\boldsymbol{r}}$ a tömegpont sebessége, $\ddot{\boldsymbol{r}}$ pedig a gyorsulása.

mennyiség *negatív, nulla* vagy *pozitív.* A (2) kifejezés előjele nem függ m-től, ezért azt itt elhagytuk, de vegyük észre, hogy ha nem hagyjuk el, hanem a helyére $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$-t helyettesítünk, kihasználva a teljes impulzus nulla voltát, megkapjuk a rendszer teljes energiáját:

$$E = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_1+r_2} + \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{r}}_2)^2.$$

Tehát – a fizikai érzékünkkel összhangban – most is mondhatjuk: az energia negatív vagy pozitív volta dönti el a pálya alakját. (Természetesen ez így csak ebben a tömegközépponti koordináta-rendszerben igaz. Ha a közös tömegközéppont mozog, ahhoz is tartozik egy energiajárulék, ami azonban nem befolyásolja a testek egymáshoz viszonyított mozgását.) Érdemes megjegyezni, hogy az egyes testek pályája geometriai értelemben hasonló ahhoz a síkgörbéhez, amelyet az $\boldsymbol{r}_{1,2}$ vektor kirajzol. A megfelelő fókuszpontok a közös tömegközéppontba esnek, és pl. ellipszispálya esetén az $\boldsymbol{r}_{1,2}$ ellipszisének fél nagytengelye $a = (r_{1,2\,\max} + r_{1,2\,\min})/2$ azonos a két ellipszis a_1 és a_2 fél nagytengelyének összegével. (Az indexben megjelenő max és min jelzés értelemszerűen az adott mennyiség maximális és minimális értékére utal.) Ennek megfelelően a keringési idő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(a_1+a_2)^3}{\gamma(m_1+m_2)}}.$$

A háromtest-probléma egy speciális esete

Most tekintsünk három, minden más objektumtól függetlennek tekinthető égitestet! A tömegek legyenek m_1, m_2 és m_3, és a koordináta-rendszerünk origójának válasszuk most is a közös tömegközéppontot. Az $\boldsymbol{r}_i$ koordináták és az $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ sebességek ($i = 1, 2, 3$) most az

$$m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 = 0 \qquad \text{és} \qquad m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3 = 0 \tag{3}$$

egyenleteket elégítik ki. A három mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= -\gamma\frac{m_2}{(r_{1,2})^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) - \gamma\frac{m_3}{(r_{1,3})^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_3),\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= -\gamma\frac{m_1}{(r_{1,2})^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) - \gamma\frac{m_3}{(r_{2,3})^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_3),\\
\ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= -\gamma\frac{m_2}{(r_{2,3})^3}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2) - \gamma\frac{m_1}{(r_{1,3})^3}(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1),
\end{aligned}$$

ahol az előzőekhez hasonlóan az $r_{i,j}$ az i és j indexű tömegpontok távolsága. Ez a csatolt egyenletrendszer már kezelhetetlenül bonyolult, de igen egyszerűvé válik abban a speciális esetben, amikor $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,3} = R$, azaz a testek egy R oldalhosszú, egyenlő oldalú háromszög csúcsain helyezkednek el. Ekkor (3) segítségével mind a három az

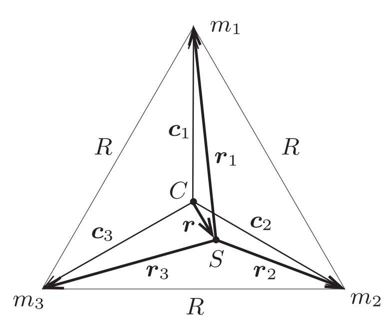
$$\ddot{\boldsymbol{r}}_i = -\gamma\frac{m_1+m_2+m_3}{R^3}\boldsymbol{r}_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4}$$

alakra hozható.

Mi következik ebből? Nevezetesen az, hogy ha egy pillanatban mindhárom test sebessége ugyanúgy arányos a helyvektorával, azaz

$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \kappa\boldsymbol{r}_i + \omega\omega\omega_\omega \times \boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, 3), (5)$ *akkoreza mozgssorngyismarad.Ittaz elstagegyegyenletestguls, melybena* κ **egy 1/s dimenziójú mennyiség, a második tag pedig**

akkor igazoljuk, hogy (F3) a mozgási energia, tehát (F1) valóban a teljes energia. Márpedig (F4) fennáll, ahogy azt a mellékelt *ábra* segítségével könnyen beláthatjuk.



Ezen a háromszög oldala R, a geometriai súlypontja C, a fizikai tömegközéppontja S, a C-ből az S-be mutató vektor $\boldsymbol{r}$, a C-ből és az S-ből az egyes tömegekhez mutató vektorok $\boldsymbol{c}_i$ és $\boldsymbol{r}_i$. Az (F4) egyenlet jobb oldala a rendszer S-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, amit a Steiner-tétel segítségével összeköthetünk a jól számítható C-re vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékkal. Eszerint

$$\sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i c_i^2 - r^2 \sum_{i=1}^{3} m_i. \tag{F5}$$

Ugyanakkor a tömegközéppont definíciójából

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{r} \sum_{i=1}^{3} m_i.$$

Ezt az egyenletet négyzetre emelve és kihasználva, hogy $\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{c}_j = \frac{1}{3} R^2$, ha $i = j$, és $-\frac{1}{6} R^2$, ha $i \neq j$, kiszámíthatjuk r^2-et, és így (F5) jobb oldalát kiértékelve valóban megkapjuk (F4)-et.