

## Elméleti feladatok

### 1. feladat. A Napból érkező részecskék

#### A rész. A Naptól jövő sugárzás

**A.1.** A Stefan–Boltzmann-törvény alapján:  $L_{\odot} = (4\pi R_{\odot}^2)(\sigma T_{\odot}^4)$ . Innen:

$$T_{\odot} = \left( \frac{L_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^2 \sigma} \right)^{1/4} = 5,76 \cdot 10^3 \text{ K.}$$

**A.2.**

$$P_{\text{be}} = \int_0^{\infty} u(f) \, df = \int_0^{\infty} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi h}{c^2} f^3 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}) \, df.$$

Legyen  $x = \frac{hf}{k_{\text{B}}T_{\odot}}$ . Ekkor  $f = \frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h}x$  és  $df = \frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h}dx$ . Ezzel:

$$P_{\text{be}} = \frac{2\pi h A R_{\odot}^2}{c^2 d_{\odot}^2} \frac{(k_{\text{B}}T_{\odot})^4}{h^4} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \, dx = \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \cdot 6 = \frac{12\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}.$$

Másik megoldás, amely *nem* használja a Wien-közelítést:

$$P_{\text{be}} = \frac{L_{\odot}}{4\pi d_{\odot}^2} A = \sigma T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} = \frac{2\pi^5 k_{\text{B}}^4}{15c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2}.$$

**A.3.**

$$n_{\gamma}(f) = \frac{u(f)}{hf} = A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} f^2 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}).$$

**A.4.** A hasznos kimenő teljesítményt az  $E_{\text{g}} = hf_{\text{g}}$  egy fotonra jutó energiakvantum és az  $E \geq E_{\text{g}}$  energiájú fotonok számának szorzata adja:

$$\begin{aligned} P_{\text{ki}} &= hf_{\text{g}} \int_{f_{\text{g}}}^{\infty} n_{\gamma}(f) \, df = hf_{\text{g}} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \int_{f_{\text{g}}}^{\infty} f^2 \exp(-hf/k_{\text{B}}T_{\odot}) \, df = \\ &= k_{\text{B}}T_{\odot} x_{\text{g}} A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} \frac{2\pi}{c^2} \left( \frac{k_{\text{B}}T_{\odot}}{h} \right)^3 \int_{x_{\text{g}}}^{\infty} x^2 e^{-x} \, dx = \\ &= \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} T_{\odot}^4 A \frac{R_{\odot}^2}{d_{\odot}^2} x_{\text{g}} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}. \end{aligned}$$

**A.5.** A hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\text{ki}}}{P_{\text{be}}} = \frac{x_{\text{g}}}{6} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}.$$

Ha  $P_{\text{be}}$ -re az A.2. másik eredményét használjuk, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{2\pi k_{\text{B}}^4}{c^2 h^3} \frac{1}{\sigma} x_{\text{g}} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}} = \left( \frac{90}{\pi^4} \right) \frac{x_{\text{g}}}{6} (x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}.$$

A két eredmény közel van egymáshoz, mert  $90/\pi^4 \approx 0,92 \approx 1$ .

**A.6.**

$$\eta = \frac{1}{6} (x_{\text{g}}^3 + 2x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}}) e^{-x_{\text{g}}}.$$

A határokon érvényes értékek:  $\eta(0) = 0$  és  $\eta(\infty) = 0$ .

Mivel a zárójelben levő polinom kizárólag pozitív együtthatókat tartalmaz, az monoton növekvő. Az exponenciális függvény monoton csökkenő, és a szorzatuknak valahol maximuma van.

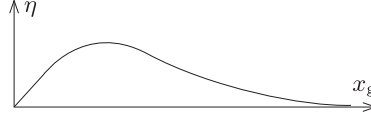
$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} &= \frac{1}{6} (-x_{\text{g}}^3 + x_{\text{g}}^2 + 2x_{\text{g}} + 2) e^{-x_{\text{g}}}, \\ \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}}=0} &= \frac{1}{3}, \quad \left. \frac{d\eta}{dx_{\text{g}}} \right|_{x_{\text{g}} \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Az elméleti feladatok szövegét a múlt havi számunkban közzeltük.

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\frac{d\eta}{dx_g} = \frac{15}{\pi^4} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g},$$

$$\left. \frac{d\eta}{dx_g} \right|_{x_g=0} = \frac{30}{\pi^4} \approx 0,31, \quad \left. \frac{d\eta}{dx_g} \right|_{x_g \rightarrow \infty} = 0.$$



**A.7.** A maximális értéket ott veszi fel a függvény, ahol

$$\frac{d\eta}{dx_g} = \frac{1}{6} (-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0 \Rightarrow p(x_g) \equiv x_g^3 - x_g^2 - 2x_g - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához használhatjuk például a felező módszert (más numerikus módszer is elfogadható):

$$\begin{aligned} p(0) &= -2, \\ p(1) &= -4, \\ p(2) &= -2, \\ p(3) &= 10 \Rightarrow 2 < x_0 < 3, \\ p(2,5) &= 2,375 \Rightarrow 2 < x_0 < 2,5, \\ p(2,25) &= -0,171 \Rightarrow 2,25 < x_0 < 2,5. \end{aligned}$$

A közelítő érték, ahol  $\eta$ -nak maximuma van:  $x_0 = 2,27$ . A maximum:  $\eta(2,27) = 0,457$ .

**A.8.** Az  $x_g$  értéke:

$$x_g = \frac{1,11 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 5763} = 2,23,$$

amivel a hatások:

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{x_g}{6} (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0,457.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\eta_{\text{Si}} = \frac{15x_g}{\pi^4} (x_g^2 + 2x_g + 2)e^{-x_g} = 0,422.$$

**A.9.** A Nap teljes gravitációs potenciális energiája:

$$\Omega = - \int_0^{M_\odot} \frac{Gm \, dm}{r}.$$

Az egyenletes tömegeloszlás miatt:

$$\varrho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}, \quad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho, \quad dm = 4\pi r^2 \varrho \, dr.$$

Ezzel:

$$\Omega = - \int_0^{R_\odot} G \left( \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho \right) (4\pi r^2 \varrho) \frac{dr}{r} = - \frac{16\pi^2 G \varrho^2}{3} \frac{R_\odot^5}{5} = - \frac{3}{5} \frac{GM_\odot^2}{R_\odot}.$$

**A.10.**

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} = 1,88 \cdot 10^7 \text{ év.}$$

**B rész. A Napból jövő neutrínók**

**B.1.**  $\Delta E$  energia felszabadulása során két neutrínó keletkezik, így

$$\Phi_\nu = 2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} = 2 \cdot \frac{3,85 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1,50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 4,0 \cdot 10^{-12}} = 6,8 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-2}.$$

**B.2.** Legyen  $\varepsilon$  a neutrínó detektálásának hatásfoka,  $N_0$  a bejövő részecskeszám. Ezzel:

$$\begin{aligned} N_1 &= \varepsilon N_0, \\ N_e &= \varepsilon N_0(1-r), \\ N_x &= \varepsilon N_0 r/6, \\ N_2 &= N_e + N_x. \end{aligned}$$

Tehát:

$$(1-r)N_1 + \frac{r}{6}N_1 = N_2,$$

innen a kért hányados:

$$r = \frac{6}{5} \left( 1 - \frac{N_2}{N_1} \right).$$

**B.3.** Amikor egy elektron már éppen nem bocsát ki Cserenkov-sugárzást, a sebessége  $v_{\text{stop}} = c/n$ -re csökken. Az elektron teljes energiája ekkor:

$$E_{\text{stop}} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v_{\text{stop}}^2/c^2}} = \frac{nm_e c^2}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Abban a pillanatban, miután a neutrínó kiütötte az elektront, az elektron energiája:

$$E_{\text{start}} = \alpha \Delta t + \frac{nm_e c^2}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

A kölcsönhatás előtt az elektron energiája  $m_e c^2$ . Így a neutrínónak átadott energia:

$$E_{\text{átadott}} = E_{\text{start}} - m_e c^2 = \alpha \Delta t + \left( \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} - 1 \right) m_e c^2.$$

**B.4.** A  ${}^7\text{Be}$  atommagok mozgása miatt Doppler-effektus lép fel a neutrínókra. Mivel az energia relatív megváltozása kicsiny ( $\Delta E_{\text{rms}}/E_\nu \sim 10^{-4}$ ), a nemrelativisztikus Doppler-eltolódással lehet számolni (a relativisztikus számolás szinte azonos eredményt ad). A megfigyelés irányának a  $z$  irányt véve:

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} = \frac{v_{z,\text{rms}}}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} V_{\text{Be}}}{c} = 3,85 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát a Be atommagok sebességének négyzetes középértéke:

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} \cdot 3,85 \cdot 10^{-4} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} = 2,01 \cdot 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

A Nap magjának átlagos hőmérséklete pedig:

$$\frac{1}{2} m_{\text{Be}} V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2} k_B T_c \quad \Rightarrow \quad T_c = 1,13 \cdot 10^7 \text{ K}.$$

## 2. feladat. A szélsőértékely

### A rész. Szélsőértékely a mechanikában

**A.1.** A mechanikai energia megmaradása alapján:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + V_0, \quad \text{amiből} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

**A.2.** A határfelületen csak az  $x$  irányú sebességkomponens változik (a határfelületen fellépő  $-x$  irányú erőlkés hatására), az  $y$  irányú nem. Ezért

$$\begin{aligned} v_{1y} &= v_{2y}, \\ v_1 \sin \vartheta_1 &= v_2 \sin \vartheta_2. \end{aligned}$$

**A.3.** A hatás definíciójának megfelelően  $A(w)$  az  $O$  és  $P$  rögzített pontok között:

$$A(w) = m v_1 \sqrt{x_1^2 + w^2} + m v_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0^2 - w^2)}.$$

Az  $A(w)$  hatás akkor lesz minimális, ha  $w$  szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{v_1 w}{\sqrt{x_1^2 + w^2}} - \frac{v_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}} = 0,$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - w)\sqrt{x_1^2 + w^2}}{w\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}}.$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz, mint az A.2.-ben megkapott  $v_1 \sin \vartheta_1 = v_2 \sin \vartheta_2$  eredmény!

### B rész. Szélsőérték az optikában

**B.1.** A fény sebessége az I-es közegben  $c/n_1$ , a II-es közegben  $c/n_2$ , ahol  $c$  a fénysebesség vákuumban. Legyen a két közeget elválasztó egyenes egyenlete  $y = y_0$ , a fénysugár pedig az  $x = w$  helyen lépjen át egyik közegből a másikba. Az a  $\tau(w)$  idő, amíg a fény a  $(0; 0)$  origóból a rögzített  $(x_0; y_0)$  pontba jut:

$$\tau(w) = \frac{n_1}{c} \sqrt{y_1^2 + w^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

A szélsőértéket A.3.-hoz hasonlóan deriválással határozhatjuk meg:

$$\frac{n_1 w}{\sqrt{y_1^2 + w^2}} - \frac{n_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = 0,$$

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Ez a Snellius–Descartes-törvény.

**B.2.** A Snellius–Descartes-törvény alapján  $n_0 \sin \alpha_0 = n(y) \sin \alpha$ . Ezen kívül felhasználva, hogy  $dy/dx = -\operatorname{ctg} \alpha$  és  $\sin \alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ :

$$n_0 \sin \alpha_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0 \sin \alpha_0}\right)^2 - 1}.$$

**B.3.** A B.2. eredményből a változókat szétválasztva és mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}} = -\int dx.$$

(Felhasználtuk, hogy  $\alpha_0 = 90^\circ$  és így  $\sin \alpha_0 = 1$ .) Használjuk a  $\xi = (n_0 - ky)/n_0$  helyettesítést, így:

$$\int \frac{d\xi \left(-\frac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int dx, \quad -\frac{n_0}{k} \ln \left( \frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1} \right) = -x + c.$$

Figyelembe véve az  $x = 0$  és  $y = 0$  kezdeti feltételeket  $c = 0$ . Ebből a pálya egyenlete:

$$x = \frac{n_0}{k} \ln \left[ \left( \frac{n_0 - ky}{n_0} \right) + \sqrt{\left( \frac{n_0 - ky}{n_0} \right)^2 - 1} \right].$$

**B.4.** Felhasználva a megadott adatokat ( $y_0 = 10,0$  cm,  $n_0 = 1,50$ ,  $k = 0,050$  cm<sup>-1</sup>) a B.3. végeredményébe behelyettesítve ( $y = -y_0$ ):

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \ln \left[ \left( \frac{n_0 + ky_0}{n_0} \right) + \sqrt{\left( \frac{n_0 + ky_0}{n_0} \right)^2 - 1} \right] = 24,0 \text{ cm}.$$

### C rész. A szélsőérték és az anyag hullámtermészete

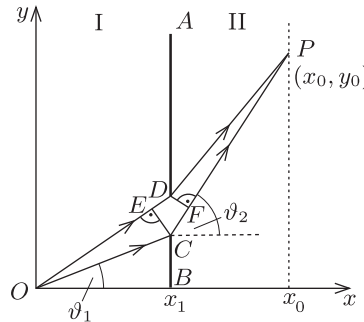
**C.1.** A részecske de Broglie-hullámhossza  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , amiből a keresett fáziskülönbség (a hatás  $\Delta A = mv\Delta s$  definícióját felhasználva):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{h} mv\Delta s = \frac{2\pi \Delta A}{h}.$$

**C.2.** Tanulmányozzuk az  $OCP$  és  $ODP$  pályákat! A geometriai útkülönbség az I-es tartományban  $ED$ , a II-es tartományban  $CF$ . Ebből  $d \ll x_0 - x_1$  és  $d \ll x_1$  felhasználásával

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{CD} &= \frac{2\pi d \sin \vartheta_1}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin \vartheta_2}{\lambda_2} = \\ &= \frac{2\pi m v_1 d \sin \vartheta_1}{h} - \frac{2\pi m v_2 d \sin \vartheta_2}{h} = \\ &= 2\pi \frac{md}{h} (v_1 \sin \vartheta_1 - v_2 \sin \vartheta_2) = 0\end{aligned}$$

(A.2. vagy B.1. alapján). Ez az eredmény várható, hiszen a klasszikus pálya közelében erősítésnek kell lennie.



## D rész. Anyaghullámok interferenciája

**D.1.** Az energiák alapján

$$qU_1 = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{amiből} \quad U_1 = \frac{mv^2}{2q} = 1,139 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

**D.2.** A fáziskülönbség  $P$ -ben:

$$\Delta\varphi_P = \frac{2\pi d \sin \vartheta}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin \vartheta}{\lambda_2} = 2\pi(v_1 - v_2) \frac{md}{h} \sin \vartheta = 2\pi\beta,$$

amiből

$$\beta = 5,13.$$

**D.3.** Az előző rész alapján látható, hogy a legközelebbi olyan helyen, ahol nem várható elektronbecsapódás (kioltás van)  $\Delta\varphi = 5,5 \cdot 2\pi$ . Ez alapján:

$$\begin{aligned}\frac{mv_1 d \sin \vartheta}{h} - \frac{mv_2 d \sin(\vartheta + \Delta\vartheta)}{h} &= 5,5; \\ \sin(\vartheta + \Delta\vartheta) &= \frac{\frac{mv_1 d \sin \vartheta}{h} - 5,5}{\frac{mv_2 d}{h}} = \frac{v_1}{v_2} \sin \vartheta - \frac{5,5 h}{mv_2 d} = 0,173586, \\ \Delta\vartheta &= -0,0036^\circ,\end{aligned}$$

amiből a  $P$ -hez legközelebbi hely távolsága:

$$\Delta y = (x_0 - x_1) [\text{tg}(\vartheta + \Delta\vartheta) - \text{tg} \vartheta] = -16,2 \mu\text{m}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy ez a pont  $P$  alatt van.

**D.4.** Az  $I$  fluxussűrűség az elektronok  $v$  sebességének és  $N/V$  sűrűségének szorzata. Ez alapján:

$$N = \frac{I_{\min} V}{v} = 1, \quad \text{amiből} \quad I_{\min} = \frac{v}{V} = \frac{v}{Al} = 4 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}.$$

## 3. feladat. Nukleáris reaktor tervezése

**A rész. Az üzemanyagrúd**

**A.1.** A magreakció során felszabaduló energiát a tömegdefektusból számolhatjuk:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) + m(^1_0\text{n}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - 2m(^1_0\text{n})] c^2.$$

Összevonás után, a tömegek felhasználásával kapjuk:

$$\Delta E = [m(^{235}\text{U}) - m(^{94}\text{Zr}) - m(^{140}\text{Ce}) - m(^1\text{n})] c^2 = 208,7 \text{ MeV}.$$

**A.2.** Az  $\text{U}_2\text{O}$  (feladatban megadott) sűrűsége a térfogategységre eső molekulák össztömegét jelenti, így ezt elosztva a moláris tömeggel, majd megszorozva az  $N_A$  Avogadro-állandóval, megkapjuk az  $1 \text{ m}^3$ -nyi anyagban található  $\text{U}_2\text{O}$ -molekulák  $N_1$  számát:

$$N_1 = \frac{\rho N_A}{M} = 2,364 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Az urán-dioxid molekuláknak azonban csak 0,72%-a tartalmazza a 235-ös uránizotópot, így a feladat kérdésére a válasz:

$$N = 0,0072 \cdot N_1 = 1,702 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}.$$

**A.3.** Az üzemanyaggrúd egységnyi térfogatában  $N$  hasadó uránatom van, ezek teljes hatáskeresztmetszete  $N\sigma_f$ . Ha ezt megszorozzuk a  $\varphi$  neutronfluxussal, az időegység alatt (köbméterenként) bekövetkező hasadások számát kapjuk:  $\varphi N\sigma_f$ . Minden magreakcióban az A.1. részben kiszámolt  $\Delta E$  energia szabadul fel, melynek 80%-a alakul hővé, így a hőfejlődés  $Q$  üteme:

$$Q = 0,8 \varphi N\sigma_f \Delta E = 4,92 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3.$$

**A.4.** A  $T_c - T_s$  hőmérsékletkülönbség K dimenziójú, így az  $F(Q, a, \lambda)$  mennyiség mértékegysége is kelvin kell hogy legyen. Keressük az ismeretlen függvényt  $F(Q, a, \lambda) = Q^\alpha a^\beta \lambda^\gamma$  alakban, és vizsgáljuk meg, mekkorának kell választanunk az  $\alpha, \beta, \gamma$  számokat, hogy kelvin dimenziójú mennyiséget kapjunk. A jobb oldalon szereplő mennyiségek mértékegysége:

$$[Q] = \text{W m}^{-3} = \text{kg s}^{-3} \text{ m}^{-1}, \quad [a] = \text{m}, \quad [\lambda] = \text{W m}^{-1} \text{ K}^{-1} = \text{kg s}^{-3} \text{ m K}^{-1}.$$

Ezek felhasználásával az alábbi egyenletet kapjuk a kitevőkre:

$$\text{K} = (\text{kg s}^{-3} \text{ m}^{-1})^\alpha \text{m}^\beta (\text{kg s}^{-3} \text{ m K}^{-1})^\gamma,$$

amiből  $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = -1$  adódik. Tehát az üzemanyaggrúd közepének és felületének hőmérsékletkülönbségét megadó formula (a feladatban megadott  $1/4$ -es faktort is visszaírva)<sup>2</sup>:

$$T_c - T_s = \frac{Qa^2}{4\lambda}.$$

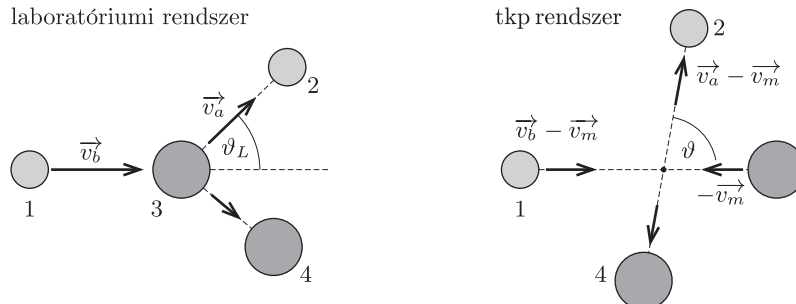
**A.5.** Az üzemanyaggrúd közepének a hőmérséklete nem érheti el az  $\text{U}_2\text{O}$  olvadási hőmérsékletét, míg a külső felületének hőmérséklete a hűtőközeg hőmérsékletével egyezik meg. Így az A.4. részfeladatban kapott összefüggés szerint az üzemanyaggrúd sugarának lehetséges legnagyobb  $a_u$  értéke

$$a_u = \sqrt{\frac{4\lambda(T_c - T_s)}{Q}},$$

ahol most  $T_c = T_{\text{olv}} = 3138 \text{ K}, T_s = 577 \text{ K}$ . A megadott adatokat és  $Q$  fentebb kiszámolt értékét behelyettesítve  $a_u = 8,27 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

## B rész. A moderátor

**B.1.** Az ábrán láthatóak a sebességviszonyok a tömegközépponti koordináta-rendszerben. Fontos megjegyezni, hogy a  $\vartheta$  szög nagyobb, mint  $\vartheta_L$ .



<sup>2</sup>A dimenzióanalízis módszere egy dimenziótlan szorzótényező erejéig határozatlanul hagyja a megoldást. A helyzetet az tette volna egyértelművé, ha a feladat szövegében megadják, hogy a fizikai mennyiségek hatványainak szorzata előtt álló állandó számértéke éppen  $1/4$  (-a szerk.).

**B.2.** A tömegközéppont sebessége a rendszer impulzusának és a teljes tömegének hányadosa:

$$v_m = \frac{v_b}{A+1}.$$

Ugyanekkora sebességgel mozog a tkp rendszerből nézve a laboratóriumi rendszerben kezdetben álló moderátoratom is:

$$V = \frac{v_b}{A+1}.$$

A neutron sebességének nagysága az ütközés előtt a tkp rendszerben:

$$v = v_b - v_m = \frac{A}{A+1}v_b.$$

A tkp rendszerben a rugalmas ütközés során az energia- és impulzusmegmaradás úgy teljesül, hogy a neutron és a moderátoratom is megőrzi az ütközés előtti sebességének nagyságát (rendre  $v$  és  $V$ ), csupán a sebesség iránya változik meg.

**B.3.** Ütközés után a neutron sebességvektora a laboratóriumi rendszerben  $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_m$ , így a sebességnégyzetének nagysága (a vektorháromszögben felírható koszinusztételből):

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m \cos \vartheta.$$

Behelyettesítve  $v$  és  $v_m$  előző részfeladatban kiszámolt értékét:

$$v_a^2 = \frac{A^2 v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2A v_b^2}{(A+1)^2} \cos \vartheta,$$

amiből

$$G(\alpha, \vartheta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{A^2 + 2A \cos \vartheta + 1}{(A+1)^2}.$$

Ez kis átalakítással felírható  $\alpha$  segítségével is:

$$G(\alpha, \vartheta) = \frac{A^2 + 1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2} \cos \vartheta = \frac{1}{2}[(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \vartheta].$$

**B.4.** Az energiavesztés akkor a legnagyobb, ha a  $G(\alpha, \vartheta)$  mennyiség a lehető legkisebb. Ez (akár intuícióval, akár az előző részben kapott kifejezést vizsgálva) akkor következik be, ha  $\vartheta = 180^\circ = \pi$ , azaz ha az ütközés lineáris. Ekkor  $G(\alpha, \pi) = \alpha$ , a legnagyobb relatív energiavesztés pedig

$$f_l = \left( \frac{E_b - E_a}{E_b} \right)_{\max} = 1 - G(\alpha, \pi) = 1 - \alpha.$$

Most  $\alpha = (19/21)^2$ , így  $f_l \approx 0,181$ .

### C rész. A nukleáris reaktor

**C.1.** A reaktor térfogata adott:  $V = \pi R^2 H$ . Kérdés, hogyan kell megválasztani az  $R : H$  arányt, hogy az elsőkör neutronfluxusban szereplő

$$x = \left( \frac{2,405}{R} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{H} \right)^2$$

kifejezés minimális legyen. Fejezzük ki  $R^2$  értékét a térfogattal:

$$x = \frac{2,405^2 \pi H}{V} + \left( \frac{\pi}{H} \right)^2.$$

Bontsuk az első tagot két egyenlő kifejezés összegére, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x = \frac{2,405^2 \pi H}{2V} + \frac{2,405^2 \pi H}{2V} + \frac{\pi^2}{H^2} \geq \sqrt[3]{\frac{2,405^2 \pi H}{2V} \cdot \frac{2,405^2 \pi H}{2V} \cdot \frac{\pi^2}{H^2}}.$$

A jobb oldalon láthatóan kiesik  $H$ , így egy konstans értéket kapunk. Ezt a bal oldali kifejezés akkor veszi fel, ha a benne szereplő három tag értéke megegyezik, azaz

$$\frac{2,405^2}{2R^2} = \frac{\pi^2}{H^2}, \quad \text{valamint} \quad x = \frac{3\pi^2}{H^2}.$$

Használjuk még fel, hogy stacionárius állapotban az időegység alatt kiszökő és a láncreakcióban termelődő (több-let)neutronok száma megegyezik, vagyis  $k_1 x \psi = k_2 \psi$ , amiből

$$H = \sqrt{\frac{3\pi^2}{x}} = \sqrt{\frac{3\pi^2 k_1}{k_2}} \approx 5,87 \text{ m}, \quad \text{és} \quad R = \frac{2,405H}{\sqrt{2\pi}} \approx 3,175 \text{ m}.$$

**C.2.** A  $d = 0,287$  m oldalélű négyzetrácsba rendezett üzemanyag-kazetták mindegyikére  $d^2$  nagyságú keresztmetszet-terület jut a reaktorban. Mivel a reaktor teljes keresztmetszete  $\pi R^2$  (ahol  $R$  az előző feladatrészen meghatározott érték), így a reaktorban elférő kazetták száma legfeljebb

$$F_n = \frac{\pi R^2}{d^2} \approx 387.$$

Egyetlen (henger alakú) fűtőkazetta térfogata  $\pi r_{\text{kazetta}} H$  (ahol  $r_{\text{kazetta}} = 3,617 \cdot 10^{-2}$  m), sűrűsége adott ( $\rho = 1,060$  kg m<sup>-3</sup>), így a fűtőelemek összömege

$$M = F_n \pi r_{\text{kazetta}} H \rho \approx 9,90 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$

### Kísérleti feladatok

A Fény Nemzetközi Évéhez igazodva a kísérleti fordulóban optikai mérési feladatok voltak. Mindkét mérésben fényelhajlás (diffrakció) segítségével kellett tanulmányozni különböző struktúrákat, így a két feladathoz a (nagyon igényesen elkészített) mérési eszközök részben azonosak voltak. Emiatt a feladatokat csak meghatározott sorrendben lehetett elvégezni.

#### 1. feladat: Diffrakció csavarvonal alakú szerkezeteken

A DNS kettős spirál alakjának felfedezését egy, a DNS molekuláról készült röntgendiffrakciós kép alapozta meg. A mérési feladatban ehhez hasonlóan diffrakció segítségével kellett csavarvonal alakú szerkezetek geometriai paramétereit meghatározni.

A mérési berendezés lézermódulból, mintatartóból, tükrökből (ezek segítségével a szűk helyen meghosszabbítható a fényút) és ernyőből állt, melyeket a mérés előtt gondosan be kellett állítani. A diffrakciós képen kialakuló kioltási helyek távolságát digitális tolómérővel lehetett leolvasni.

A feladat első felében egy nagyon vékony huzalból készült, apró csavarrugó volt a vizsgálat tárgya. A meghatározandó mennyiségek: a csavarrugó  $R$  sugara,  $P$  menetemelkedése és a rugót alkotó drót  $a$  átmérője. Merőleges irányból nézve a rugó vetülete egy cikkcakkvonal, amely egyenértékű két olyan, egymással  $2\alpha$  szöget bezáró drótsorozattal, melyek párhuzamos helyzetű, egyforma vastagságú, egymástól  $d$  távolságra lévő drótszakaszokból állnak.

Az elmélet szerint egy  $a$  átmérőjű huzalon kialakuló diffrakciós kép intenzitáseloszlása (a  $\vartheta$  diffrakciós szög függvényében):

$$I(\vartheta) = I(0) \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \text{ahol} \quad \beta = \frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda}.$$

A középső folt ( $\beta = \vartheta = 0$ ) fényes, a többi olyan irányban, amelyre  $\sin \beta = 0$  (de  $\beta \neq 0$ ) az intenzitás zérus, kioltás lesz. Ez alapján az intenzitáseloszlás  $n$ -edik minimumának  $\vartheta_n$  szöge:

$$\sin \vartheta_n = \pm n \frac{\lambda}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Két párhuzamos, egymástól  $d$  távolságra lévő, ugyanolyan vastag dróton kialakuló diffrakciós kép két mintázat kombinációja (az egyetlen dróton való elhajlás és a két drót között kialakuló interferencia miatt). A kialakuló intenzitáseloszlás:

$$I(\vartheta) = I(0) \cos^2 \delta \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{\pi d \sin \vartheta}{\lambda} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\pi a \sin \vartheta}{\lambda}.$$

Az ernyőn a két,  $2\alpha$  szöget bezáró drótsorozat két,  $2\alpha$  szöget bezáró diffrakciós képet hozott létre, ebből  $\alpha$  leolvasható volt. Mindkét diffrakciós képen megtalálhatóak voltak a drót átmérőjének és a drótok távolságának megfelelő kioltási helyek. Az előző összefüggés alapján is lehetett látni, hogy a diffrakciós képen a finom (apróbb) struktúrákhoz tartoznak a nagyobb távolságok és a durvább (nagyobb) méretekhez a kisebb távolságok. A leolvasott távolságokból grafikus ábrázolás és egyenesillesztés segítségével az  $a$  drótátmérőt és a  $d$  távolságot meg lehetett határozni, ezekből pedig a csavarvonal  $R$  sugarát és  $P$  menetemelkedését ki lehetett számítani. A (szabad szemmel alig látható) rugó drótátmérője  $a = 0,15$  mm, sugara  $R = 0,75$  mm, menetemelkedése  $P = 0,9$  mm volt.

A feladat második felében egy, a DNS kettős spirálját modellező síkbeli struktúrát kellett vizsgálni. Itt az előző rész két jellemző távolsága ( $a$  és  $d$ ) mellett egy harmadik (közepes) távolság is megjelenik, és így a diffrakciós képen is háromféle távolságot kellett felismerni és megmérni.



## 2. feladat: Diffrakció vízfelszínen kialakuló kapilláris hullámokon

A folyadékok felszínén kialakuló és terjedő hullámok viselkedését két erő, a nehézségi erő és a felületi feszültségből származó erő határozza meg. Ha a hullámhossz kisebb egy  $\lambda_{kr}$  kritikus hullámhossznál, akkor a nehézségi erő hatása elhanyagolható, ezek az ún. kapilláris hullámok. ( $\lambda_{kr} = 2\pi\sqrt{\sigma/\rho g}$ , ahol  $\sigma$  a folyadék felületi feszültsége,  $\rho$  a folyadék sűrűsége,  $g$  pedig a nehézségi gyorsulás. A mérési feladatban kialakuló hullámok hullámhossza sokkal kisebb a kritikus hullámhossznál.) A kapilláris hullámok a folyadék viszkozitása miatt csillapodnak. A mérési feladatban egy vízminta felületi feszültségét és viszkozitását kellett meghatározni a kapilláris hullámokon létrejövő fényelhajlás alapján.

A kapilláris hullámok hullámhossza a fény hullámhosszához képest aránylag nagy, ezért jól mérhető diffrakcióhoz a fénynek lapos szögben kell esnie a folyadék felületére. (A diffrakciós maximumok távolságának mérése így is nehéz.) A feladat szövegében megadták a laposszögű diffrakció összefüggéseit:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_l} \sin \vartheta \sin \gamma,$$

ahol  $k = 2\pi/\lambda_f$  a kapilláris hullámok hullámszáma,  $\lambda_l$  és  $\lambda_f$  a lézerefény, illetve a felületi hullám hullámhossza,  $\vartheta$  a lézerefény vízszintessel bezárt szöge és  $\gamma$  a diffrakciós képen a központi maximum és az elsőrendű maximum közötti szögtávolság.

A folyadék felszínén a kapilláris hullámokat egy  $\omega = 2\pi f$  körfrekvenciájú rezgéskeltő hozza létre. A hullám körfrekvenciájának és hullámszámának kapcsolata a diszperziós reláció:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} k^q,$$

ahol  $q$  egy, a mérés során meghatározandó egész szám (elméleti értéke 3).

A gondos beállítás és a fénysugár szögének megmérése után a különböző frekvenciájú hullámokat egy tablettel vezérelt rezgéskeltővel hozták létre a versenyzők. A diffrakciós maximumok távolságát az ernyő helyére szerelt digitális tolmérőhöz rögzített fotodetektorral mérték, ebből határozták meg a kapilláris hullámok hullámszámát. Az  $\ln \omega - \ln k$  grafikonból leolvasható a diszperziós relációban szereplő  $q$  állandó és ( $\rho$  ismeretében) a víz  $\sigma$  felületi feszültsége.

A feladat második felében a hullámok csillapítását kellett tanulmányozni. A hullámok  $h$  amplitúdója a hullámkeltőtől  $s$  távolságra:  $h = h_0 e^{-\delta s}$ , ahol  $h_0$  az amplitúdó a hullámkeltőnél,  $\delta$  a csillapítási tényező. A tapasztalat szerint  $h_0$  arányos a rezgéskeltőre kapcsolt feszültség effektív értékének 0,4-edik hatványával, a csillapítási tényező és a folyadék  $\eta$  viszkozitásának kapcsolata:

$$\delta = \frac{8\pi\eta f}{3\sigma}.$$

A mérés során a versenyzők változtatták a hullámkeltő távolságát a fény beesési helyétől, és mérték, hogy a rezgéskeltőre mekkora feszültséget kell kapcsolni ahhoz, hogy a diffrakciós maximum intenzitása (amit a fotodetektor mér) állandó maradjon. A mérési adatokból – megfelelő grafikon megrajzolásával és egyenesillesztéssel – a vízminta viszkozitása meghatározható volt.