I. rész

1. *Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre*

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+5)^2 = 25-|y-3| \\ 21x+63y=188\end{array}\right\}.$$

(*11 pont*)

Megoldás. Az első egyenletből: $(x^2+5)^2 \geq 25$, $25-|y-3| \leq 25$. Így az első egyenlet megoldása csak $x=0$, $y=3$ lehet. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$21\cdot 0+63\cdot 3 = 189 \neq 188.$$

Az egyenletrendszernek tehát nincs megoldása.

2. *Egy óra számlapja* 20 cm *oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy* 12 *órakor az egyik csúcs felé mutatnak.*

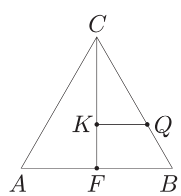
a) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?

b) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából? (*12 pont*)

Megoldás. *a*) A nagymutató nem lehet hosszabb a 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög beírt körének sugaránál. Mivel az a oldalú szabályos háromszög területe: $t=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a kerülete: $k=3a$, most $t=100\sqrt{3}$ cm^2, $k=60$ cm. A $t=rs$ (r a beírt kör sugara, s a kerület fele) összefüggés szerint:

$$r=\frac{100\sqrt{3}}{30}=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

A nagymutató nem lehet hosszabb $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ cm-nél.



b) A mutatók által kijelölt CKQ derékszögű háromszög hasonló a CFB derékszögű háromszöghöz (a szögeik páronként egyenlők). Az ABC szabályos háromszögben a K pont egyben a súlypont is, így $CK:CF=2:3$. Ez lesz a két háromszög hasonlóságának aránya is.

Tudjuk, hogy a területek a hasonlóság arányának négyzetével arányosak, ezért

$$t_{CKQ}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot t_{CFB}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{200\sqrt{3}}{9}\approx 38{,}5 \quad (\text{cm}^2).$$

Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes 38,5 cm^2 területű részt jelöl ki az óra számlapjából.

3. *Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással –* 30 *lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a csapatok száma n. Az összes mérkőzések száma: $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Minden csapatnak még 3 mérkőzése volt hátra, ez összesen $\dfrac{3n}{2}$ mérkőzés. Ezért a lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{3n}{2}=30,$$

amiből az $n^2-4n-60=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A gyökök: $n_1=10$, $n_2=-6$. A röplabdakupán 10 csapat vett részt.

4. *Határozzuk meg az* $A\cap B$ *halmazt, ha* $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)=2\sqrt{3}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R} \mid |x|\leq 2\right\}$. (*14 pont*)

Megoldás. Megoldjuk a $3(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{3}$ egyenletet. Ez

$$3\operatorname{tg}^2 x + 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

alakra rendezhető, amiből $\operatorname{tg} x$ lehetséges értékei: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ vagy $-\sqrt{3}$. Vagyis

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + k_2\pi, \quad \text{ahol} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Az $|x| \le 2$ feltétel szerint $-2 \le x \le 2$.

Vagyis

$$A \cap B = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right\}.$$

II. rész

5. *A $10^n + 14^n + 15^n + 21^n$ kifejezésben az n 3-mal osztható pozitív páratlan egész számot jelöl.*

a) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen n esetén osztható lesz 1260-nal.

b) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Alakítsuk át a négytagú kifejezést:

$$10^n + 14^n + 15^n + 21^n = 2^n \cdot 5^n + 2^n \cdot 7^n + 3^n \cdot 5^n + 3^n \cdot 7^n = (2^n + 3^n)(5^n + 7^n).$$

Legyen $n = 3k$, ahol k páratlan pozitív egész számot jelöl. Ekkor

$$(2^n + 3^n)(5^n + 7^n) = \left(2^{3k} + 3^{3k}\right)\left(5^{3k} + 7^{3k}\right) = \left(8^k + 27^k\right)\left(125^k + 343^k\right).$$

Mivel a kitevők páratlan számok, azért $35 \mid 8^k + 27^k$ és $468 \mid 125^k + 343^k$. A 468 osztható 36-tal, és $(35; 36) = 1$, ezért a kifejezés osztható $35 \cdot 36 = 1260$-nal.

b) A négytagú összeg két tagját hatféleképpen választhatjuk ki. Mivel a kitevők páratlan számok, azért az összeg osztható lesz az alapok összegével. Az alapok összege a következő hat érték közül kerülhet ki: 24, 25, 31, 29, 35, 36. Ezek közül két szám osztható hárommal, vagyis két esetben biztosan 3-mal osztható az összeg. A további négy esetben nem kaphatunk 3-mal osztható számot, mert a kéttagú összeg egyik tagja osztható 3-mal, a másik pedig nem. Így a keresett valószínűség $\dfrac{1}{3}$.

6. *Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az*

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk. (*16 pont*)

Megoldás. A megadott képletet alakítsuk a következő módon:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)}.$$

A koszinusz-tételt alkalmazva: $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Ugyanígy felírhatjuk $\cos\beta$ és $\cos\gamma$ értékét is:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vagyis:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\sin\alpha} + \dfrac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\sin\beta} + \dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin\gamma}\right)} =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin\alpha} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\sin\beta} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin\gamma}\right)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4t} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4t} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4t}\right)} =$$

$$= \frac{t\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{\left(b^2 + c^2 - a^2\right) + \left(a^2 + c^2 - b^2\right) + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)} = \frac{t\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}{a^2 + b^2 + c^2} = t.$$

Valóban a háromszög területét adja ez a képlet.

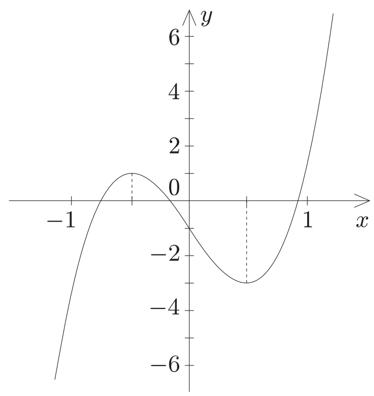
7. *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$.* (*16 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy $f(x)$ mindenütt folytonos függvény. Mivel az

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

függvény zérushelyei a $-\dfrac{1}{2}$ és az $\dfrac{1}{2}$, azért itt lehet az eredeti függvénynek lokális szélsőértéke. Ezeken a helyeken az első derivált előjelet vált (pozitívból negatívba, illetve negatívból pozitívba megy át), így az első helyen lokális maximuma, a második helyen lokális minimuma van a függvénynek. Számolással kapjuk, hogy $f(-0{,}5) = 1$ és $f(0{,}5) = -3$. Vagyis a $\left]-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right[$ intervallumon van zérushelye a függvénynek.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x$
f	$\nearrow$	maximum	$\searrow$	minimum	$\nearrow$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$



Mivel $\lim\limits_{x\to\infty}(8x^3 - 6x - 1) = \infty$, azért az $\left]\dfrac{1}{2}; \infty\right[$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Mivel $\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^3 - 6x - 1) = -\infty$, azért a $\left]-\infty; -\dfrac{1}{2}\right[$ intervallumon is van zérushelye a függvénynek.

Azaz van három különböző zérushelye.

Mivel $f(0) = -1$, azért a középső zérushelyről az is megállapítható, hogy a $\left]-\dfrac{1}{2}; 0\right[$ intervallumon található. Ez azt jelenti, hogy két negatív és egy pozitív zérushellyel rendelkezik a függvény. Tudjuk, hogy $\cos\dfrac{\pi}{9} > 0$, ezért ha az $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$ valóban zérushelye a függvénynek, akkor az a három zérushely közül csakis a legnagyobb lehet.

A $\dfrac{\pi}{9}$ háromszorosa $\dfrac{\pi}{3}$, ami nevezetes szög. Tudjuk, hogy $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Alkalmazzuk a $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ összefüggést:

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}.$$

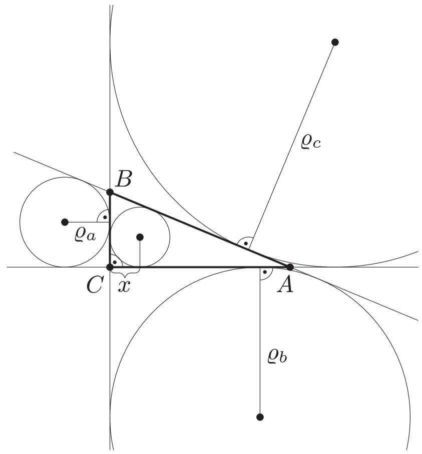
Ezt 2-vel szorozva és rendezve kapjuk:

$$8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} - 1 = 0.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ hozzárendelésű függvénynek az $x_1 = \cos\dfrac{\pi}{9}$ a zérushelye.

8. *Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara* 2, *a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara* 3 *és* 10. *Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara?* (*16 pont*)

Megoldás. Ha elkészítjük az *ábrát* (és a szokásos jelöléseket használjuk), akkor könnyen igazolható, hogy $\varrho_a = s - b$ és $\varrho_b = s - a$. A két összefüggés összeadásával kapjuk, hogy $\varrho_a + \varrho_b = c$. A megadott adatok szerint: $c = 13$.



Derékszögű háromszög esetén $\varrho_c = s$.

Ha a háromszög beírt körének a BC oldallal vett érintési pontja és a B csúcs közti távolság x, akkor: $(x+2)^2 + (15-x)^2 = 169$, amiből $x^2 - 13x + 30 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 3$. Innen $a = 5$, $b = 12$.

A derékszögű háromszög mindhárom oldalát ismerve az átfogóhoz hozzáírt kör sugarát kiszámolhatjuk: $\varrho_c = s = \dfrac{5+12+13}{2} = 15$.

Megjegyzés. Általában is megmutathatjuk, hogy derékszögű háromszög esetén: $\varrho_a + \varrho_b + \varrho = \varrho_c$.

9. *Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne* 12 *órás és* 6 *órás jegy. A* 12 *órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni* 1000 Ft*-ért, a* 6 *órás jegy ára pedig* 600 Ft *lenne. A második változat szerint lenne* 3 *órás jegy* 350 Ft*-ért,* 6 *órás jegy* 600 Ft*-ért,* 9 *órás jegy* 850 Ft*-ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy* 1250 Ft*-ért. Megfigyeltek* 150 *látogatót és a következő gyakoriság adódott:*

időtartam (h)	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	9–10	10–11	11–12
gyakoriság (fő)	6	7	11	18	25	26	20	16	15	4	2	0

a) *Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?*

b) *Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?*

c) *Egy harmadik változatban* 4, 8 *és* 12 *órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként* 700 Ft *körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára* 10*-zel osztható?* (*16 pont*)

Megoldás. a) Az első változat szerint $20+16+15+4+2+0 = 57$ fő 1000 Ft-os jegyet, és $150-57 = 93$ fő 600 Ft-os jegyet vásárolna.

Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{57 \cdot 1000 + 93 \cdot 600}{150} = 752 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

b) A második változat szerint $4+2+0 = 6$ fő 1250 Ft-os jegyet, $20+16+15 = 51$ fő 850 Ft-os jegyet, $18+25+26 = 69$ fő 600 Ft-os jegyet és $6+7+11 = 24$ fő 350 Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{24 \cdot 350 + 69 \cdot 600 + 51 \cdot 850 + 6 \cdot 1250}{150} = 671 \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

c) Legyen a 4 órás jegy ára x Ft, ekkor a 8 órásé $2x$ Ft, a 12 órásé $3x$ Ft. A megadott adatok alapján $15+4+2+0 = 21$ fő $3x$ Ft-os jegyet, $25+26+20+16 = 87$ fő $2x$ Ft-os jegyet és $6+7+11+18 = 42$ fő x Ft-os jegyet vásárolna. Ekkor az egy főre eső átlagos bevétel:

$$\frac{42 \cdot x + 87 \cdot 2x + 21 \cdot 3x}{150} = \frac{279x}{150} \left(\frac{\text{Ft}}{\text{fő}}\right).$$

Azt szeretnénk, hogy ez a szám 700 körüli érték legyen, vagyis $\dfrac{279x}{150} = 700$, amiből $x \approx 376$.

A jegyek ára kerekítés után lehetne: 380 Ft a 4 órásé, 760 Ft a 8 órásé és 1140 Ft a 12 órásé.