Ebben a cikkben egy számelméleti kérdést, az ún. multiplikatív Sidon-sorozatok maximális elemszámát fogjuk vizsgálni. A matematikában sokszor előfordul, hogy valamely terület eredményeit egy attól látszólag távol álló területen is felhasználják. A multiplikatív Sidon-sorozatokkal kapcsolatos problémák is ilyenek, ugyanis ezek vizsgálatában bizonyos gráfelméleti eredmények is jelentős szerepet kapnak.

Egy pozitív egész számokból álló A halmazt akkor hívunk multiplikatív Sidon-sorozatnak (továbbiakban röviden: Sidon-sorozatnak), ha az

$$ab = cd \tag{1}$$

egyenletnek csak triviális megoldása van A-ban, vagyis $a, b, c, d \in A$ esetén csak akkor teljesülhet az (1) egyenlet, ha $\{a, b\} = \{c, d\}$. Azt szeretnénk meghatározni, hogy az első n pozitív egész szám közül legfeljebb hányat lehet úgy kiválasztani, hogy azok Sidon-sorozatot alkossanak. Ezt a maximális elemszámot jelölje $F(n)$. Könnyű észrevenni, hogy a prímek Sidon-sorozatot alkotnak, ugyanis, ha a, b, c, d (pozitív) prímszámok, és $ab = cd$, akkor a számelmélet alaptétele miatt valóban $\{a, b\} = \{c, d\}$. A prímek számát n-ig $\pi(n)$-nel jelöljük, és a prímszámtétel szerint $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$ [1]. Tehát $F(n) \geq \pi(n)$ minden n-re teljesül. A kérdés az, hogy lehet-e ennél több számot is kiválasztani, és ha igen, akkor mennyivel.

A következő ötlet segítségével adhatunk felső becslést a Sidon-sorozatok elemszámára: az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz minden a_i elemét írjuk fel *„ügyesen”* két pozitív egész szám szorzataként: $a_i = u_i v_i$. Ezután tekintsük azt a G gráfot, amelynek csúcsai $1, 2, \dots, n$, és minden $1 \leq i \leq k$-ra kössük össze az u_i és v_i csúcsokat; ily módon egy k élű gráfot kapunk. Megmutatjuk, hogy ha A Sidon-sorozat, akkor G-ben nem lehet 4 hosszúságú kör. Ha ugyanis $x_1x_2x_3x_4$ egy 4 hosszú kör lenne G-ben, akkor mivel (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1) élek G-ben, ezért az x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_1 szorzatok különböző elemei lennének A-nak. (Azért különbözők, mert minden A-beli számhoz csak egyetlen G-beli élet húztunk be.) Ekkor azonban $a = x_1x_2$, $b = x_3x_4$, $c = x_2x_3$, $d = x_4x_1$ nemtriviális megoldása lenne az (1) egyenletnek. Vagyis a kapott G gráfra mindenképpen teljesül, hogy nem tartalmaz 4 hosszúságú kört. Persze G-nek ettől még lehet sok éle, például, ha minden a_i számot $a_i = 1 \cdot a_i$ alakban írunk fel, azaz például $u_i = 1$, $v_i = a_i$ (minden $1 \leq i \leq k$ esetén), akkor egy csillagot kapunk: minden csúcs az 1-gyel van összekötve ($1 \in A$ esetén van egy hurokél is), ami nem tartalmaz 4 hosszú kört, viszont egy ilyen csillagnak n éle is lehet (az 1-hez tartozó hurokéllel együtt), és így csak a magától értetődő $F(n) \leq n$ becslést kapnánk. A cél tehát az, hogy a számokat oly módon írjuk fel szorzat alakban, hogy annak segítségével jó becslést kapjunk. Az ehhez szükséges ötlet Erdőstől származik, és a következő állításra épül:

1. állítás. *Minden $a \leq n$ pozitív egész szám felírható uv alakban, ahol $v \leq u \leq n^{2/3}$, vagy $u > n^{2/3}$ prímszám.*

Ez az állítás könnyen igazolható, a logaritmusokra áttérve levezethető a KöMaL 2012. májusi számában kitűzött **B. 4455.** számú feladatának állításából, ami a következő volt: *Véges sok pozitív szám közül egyik sem nagyobb a többi összegénél. Igazoljuk, hogy két részre oszthatjuk őket úgy, hogy bármelyik részben a számok összege legfeljebb kétszer akkora, mint a másikban.* Az állításból az derül ki, hogy minden számot fel tudunk írni két „nem túl nagy” – precízebben $n^{2/3}$-nál nem nagyobb – szám szorzataként, kivéve, ha van egy „túl nagy” – precízebben: $n^{2/3}$-nál nagyobb – prímosztója, amikor is ez nyilvánvalóan nem lehetséges, hiszen a szorzat két tényezője közül az egyiknek tartalmaznia kell ezt a már önmagában is $n^{2/3}$-nál nagyobb prímtényezőt.

Az *„ügyes”* szorzattá alakítás mellett szükségünk lesz 4 hosszú kört nem tartalmazó gráfok élszámára vonatkozó becslésekre, most az előkészületeket folytatva ilyen típusú állításokat fogunk kimondani és bizonyítani.

2. állítás. *Ha a G egyszerű gráfnak n csúcsa van és nem tartalmaz 4 hosszú kört, akkor az éleinek száma legfeljebb $\frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n - 3}\right)$.*

Bizonyítás. Számoljuk meg, hogy a gráfban hány „cseresznye” van, vagyis hány olyan részgráfot tartalmaz, amelynek csúcsai a, b, c és a össze van kötve b-vel és c-vel is. (A háromszögeket mindhárom csúcsuknál számolni fogjuk cseresznyeként.) Egyrészt, ha b-t és c-t már kiválasztottuk, akkor a csak a két csúcs egy közös szomszédja lehet. Ilyenből legfeljebb egy lehet, hiszen ha a_1 és a_2 is közös szomszéd lenne, akkor ba_1ca_2 egy 4 hosszú kört alkotna. Vagyis minden pontpárhoz legfeljebb egy cseresznye tartozhat, és így a cseresznyék száma legfeljebb $\binom{n}{2}$. Másrészt, a csúcsok fokszámát $d_1, d_2, \dots, d_n$-nel jelölve a cseresznyék száma pontosan $\binom{d_1}{2} + \dots + \binom{d_n}{2}$, hiszen ha először a cseresznye középső csúcsát választjuk ki, akkor ezután a szomszédjai közül kell még két különbözőt választanunk. A gráf élszámát k-val jelölve és a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggést felhasználva:

$$\binom{n}{2} \geq \binom{d_1}{2} + \dots + \binom{d_n}{2} = \frac{1}{2}(d_1^2 + \dots + d_n^2) - \frac{1}{2}(d_1 + \dots + d_n) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\frac{(d_1 + \dots + d_n)^2}{n} - \frac{1}{2}(d_1 + \dots + d_n) = \frac{2k^2}{n} - k.$$

[1] Ez azt jelenti, hogy $\frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}}$ tart az 1-hez, ha n tart a végtelenhez. A prímszámtétel első bizonyítását Hadamard és de la Vallée Poussin adta 1896-ban.

Tehát $\dfrac{2k^2}{n} - k \le \binom{n}{2}$, amiből már következik az állítás, hiszen a $\dfrac{2k^2}{n} - k - \binom{n}{2}$ (k-ban) másodfokú polinom nagyobbik gyöke éppen $\dfrac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$. $\square$

Olyan becslésekre is szükségünk lesz, amikor a 4 hosszú kört nem tartalmazó gráfról tudjuk, hogy páros, és ismerjük a két független csúcsosztályának elemszámát:

3. állítás. *Ha a G páros egyszerű gráf két független csúcsosztályának mérete s, illetve t, és G nem tartalmaz 4 hosszú kört, akkor éleinek száma legfeljebb*

$$\frac{t + \sqrt{t^2 + 4t(s^2 - s)}}{2}.$$

Bizonyítás. Számoljuk meg, hogy hány olyan cseresznye van a gráfban, amelynek „középső" csúcsa a t csúcsot tartalmazó csúcsosztályba esik. A t csúcsot tartalmazó csúcsosztályban a fokszámok legyenek rendre $d_1, d_2, \dots, d_t$, ekkor a kérdéses cseresznyék száma $\binom{d_1}{2} + \cdots + \binom{d_t}{2}$. Ugyanakkor ez legfeljebb $\binom{s}{2}$ lehet, hiszen a másik csúcsosztály bármely két csúcsát kiválasztva azoknak legfeljebb egy közös szomszédja lehet, hiszen a gráf nem tartalmaz 4 hosszú kört. Az előző állítás bizonyításához hasonlóan a számtani és négyzetes közepek közötti összefüggésből (az élek számát most is k-val jelölve) a következő becslés adódik:

$$\binom{s}{2} \ge \binom{d_1}{2} + \cdots + \binom{d_t}{2} \ge \frac{k^2}{2t} - \frac{k}{2},$$

és így

$$\frac{k^2}{2t} - \frac{k}{2} \le \binom{s}{2},$$

amiből már következik az állítás. $\square$

A könnyebb felhasználás érdekében ennek a becslésnek megfogalmazzuk két következményét:

4. következmény. *Ha a G páros egyszerű gráf két független csúcsosztályának mérete s, illetve t, melyekre $s \le t$ és G nem tartalmaz 4 hosszú kört, akkor éleinek száma legfeljebb*
i) $t + s^2$,
ii) $2\sqrt{t}s$, *ha* $t \le s^2$.

Mindkét állítás egyszerűen levezethető az előző becslésből. Amikor t „lényegesen nagyobb", mint s^2, akkor *i)* ad erősebb becslést, amikor pedig t „lényegesen kisebb", mint s^2, akkor *ii)*.

Most már készen állunk a következő tétel bizonyítására Sidon-sorozatok elemszámáról:

5. tétel. *Ha $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ multiplikatív Sidon-sorozat, akkor $|A| \le \pi(n) + 11n^{3/4}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ halmazon belül az $ab = cd$ egyenletnek nincsen páronként különböző számokból álló megoldása. Minden a_i számot írjunk fel $a_i = u_i v_i$ alakban az 1. állításnak megfelelően, azaz úgy, hogy u_i-re és v_i-re minden $1 \le i \le k$ esetén a következő két lehetőség valamelyike teljesüljön:
i) $v_i \le u_i \le n^{2/3}$,
ii) $n^{2/3} < u_i$ prímszám.

Tekintsük azt a G gráfot, mely csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, n\}$ és élei (u_i, v_i) (ahol $1 \le i \le k$). A-ban legfeljebb $\sqrt{n}$ darab négyzetszám lehet, így a gráfban legfeljebb $\sqrt{n}$ hurokél keletkezhet. Mivel $\sqrt{n}$ a becslés $n^{2/3}$-os „hibatagjához" képest elhanyagolható, ezért feltehetjük, hogy G-ben nincs hurokél. A G gráf éleit osszuk $K+2$ csoportba (K értékét később választjuk meg): először is, G_0 legyen az a részgráf, amelyet a $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb csúcsok feszítenek, vagyis a G_0-ban szereplő (u_i, v_i) élek mindkét végpontja legfeljebb $\sqrt{n}$. Ezután, ha $1 \le h \le K$, akkor G_h legyen az a gráf, amelyben szereplő élek egyik végpontja az $\left(n^{\frac{1}{2}+\frac{h-1}{6K}}, n^{\frac{1}{2}+\frac{h}{6K}}\right]$ intervallumba esik. (Azokat a csúcsokat, amelyekből G_h-ban nem indul él, elhagyjuk a G_h gráfból.) Mivel G-ben csak olyan élek szerepelhetnek, ahol a két végpont szorzata legfeljebb n, ezért ekkor a másik végpont biztosan az $\left[1, n^{\frac{1}{2}-\frac{h-1}{6K}}\right)$ intervallumba esik. Ez azt is jelenti, hogy G_h egy olyan páros gráf, amelynek két független csúcsosztályának elemszáma felülről becsülhető $n^{\frac{1}{2}+\frac{h}{6K}}$-val, illetve $n^{\frac{1}{2}-\frac{h-1}{6K}}$-val. Végül, a G gráfból törölve a $G_0, G_1, \dots, G_K$ gráfok éleit (és azokat a csúcsokat, melyekből így már nem indul él) csak olyan élek maradnak, amelyek egyik végpontja nagyobb, mint $n^{2/3}$. Ez csak úgy lehetséges, ha a *ii)*-es feltétel teljesül rájuk, vagyis az $n^{2/3}$-nál nagyobb végpont prímszám. A másik végpont pedig kisebb, mint $n^{1/3}$, hiszen a két végpont szorzata legfeljebb n lehet. Vagyis a megmaradó élek egy olyan G_{K+1} páros gráfot alkotnak, amelynek két független csúcshalmaza az $(n^{2/3}, n]$-be eső prímszámok, illetve az $n^{1/3}$-nál nem nagyobb pozitív egészek halmaza.

Jelölje $0 \le h \le K+1$ esetén G_h éleinek számát k_h, most felső becslést adunk a k_h értékekre.

Ha A multiplikatív Sidon-sorozat, akkor G nem tartalmazhat 4 hosszúságú kört, így a G_h gráfok sem. A G_0 gráf élszámát a 2. állítás segítségével a következő módon becsüljük:

$$k_0 \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\left(1+\sqrt{4\sqrt{n}-3}\right) \leq n^{3/4}.$$

Ha $1 \leq h \leq K$, akkor a G_h páros gráf élszámának becsléséhez a 4. következmény ii)-es becslését használjuk:

$$k_h \leq 2n^{\frac{1}{4}+\frac{h}{12K}} n^{\frac{1}{2}-\frac{h-1}{6K}} = 2n^{3/4} n^{\frac{2-h}{12K}}.$$

Akkor fogjuk ezekből az egyenlőtlenségekből a legjobb becslést kapni, ha K-t $K = \lfloor \frac{1}{12}\ln n \rfloor$-nek választjuk. Most az egyszerűség kedvéért számoljunk úgy, mintha $K = \frac{1}{12}\ln n$ teljesülne, nem nehéz meggondolni, hogy az ebből adódó hiba elhanyagolható. Mivel $n^{\frac{1}{12K}} = n^{\frac{1}{\ln n}} = e$, ezért $k_h \leq 2n^{3/4} n^{\frac{2-h}{12K}} = 2n^{3/4} \cdot e^{2-h}$, és így

$$k_1 + k_2 + \dots + k_K \leq 2en^{3/4}\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots\right) = \frac{2e^2}{e-1} n^{3/4} \leq 9n^{3/4},$$

hiszen az $1, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \dots$ mértani sorozat első K tagjának összegét az összes tag összegével felülről becsültük.

Végül, a G_{K+1} páros gráf élszámának becsléséhez a 4. következmény i)-es becslését használjuk, hiszen most az egyik független csúcsosztály „sokkal nagyobb”, mint a másik. A nagyobb független csúcsosztályt az $\left(n^{2/3}, n\right]$-be eső prímszámok alkotják, a számuk $\pi(n) - \pi\left(n^{2/3}\right)$, a kisebbiknek pedig csak $n^{1/3}$ eleme van, így:

$$k_{K+1} \leq \pi(n) - \pi\left(n^{2/3}\right) + n^{2/3}.$$

A kapott becsléseket összeadva G élszámára éppen a bizonyítandó felső becslést kapjuk:

$$k_0 + \dots + k_{K+1} \leq n^{3/4} + 9n^{3/4} + \pi(n) - \pi\left(n^{2/3}\right) + n^{2/3} \leq \pi(n) + 11n^{3/4}. \qquad \square$$

A prímszámok kiválasztásával az eddig kapott legjobb alsó becslésünk $\pi(n) \leq F(n)$, azonban ezen szintén gráfelméleti eszközöket felhasználva még lehet javítani. Mutatunk egy konstrukciót olyan Sidon-sorozatra, amelynek elemszáma $\pi(n) + \frac{n^{3/4}}{(\ln n)^{3/2}}$. Tegyük fel, hogy H egy olyan egyszerű gráf a $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb prímszámokból álló csúcshalmazon, amely nem tartalmaz 4 hosszúságú kört. Az A halmaz elemei legyenek azok az uv szorzatok, amelyekre (u,v) éle H-nak, továbbá a $\sqrt{n}$-nél nagyobb prímszámok. Most tegyük fel, hogy $ab = cd$ teljesül valamely $a, b, c, d \in A$ elemekre. Ekkor a, b, c, d mindegyike vagy $\sqrt{n}$-nél nagyobb prímszám, vagy két $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb prímszám szorzata. Ha például a prím, akkor $a \mid cd$ miatt $a = c$ vagy $a = d$ és így $\{a, b\} = \{c, d\}$ teljesül, vagyis az egyenlet egy A-beli nemtriviális megoldásában nem szerepelhet prímszám. Ha a kanonikus alakja $a = pq$, akkor feltehető, hogy $p \mid c$, mondjuk $c = pr$. Ha $r = q$, akkor $a = c$ és ismét triviális megoldást kapunk. Ha $r \neq q$, akkor $r \nmid a$, és így $r \mid b$, mondjuk $b = rs$, és így $d = qs$. Ekkor viszont $pqsr$ egy 4 hosszú kör lenne H-ban, ami ellentmondás. Tehát a megadott A halmaz valóban Sidon-sorozat, a mérete pedig $\pi(n) - \pi\left(\sqrt{n}\right) + k(H)$, ahol $k(H)$ a H gráf éleinek számát jelöli. Másrészt, meg lehet mutatni, hogy a 2. állításban szereplő felső becslés konstans szorzótól eltekintve pontos, például igaz az, hogy minden elég nagy n-re konstruálható 4 hosszú kört nem tartalmazó n csúcsú $\frac{2}{5}n^{3/2}$ élű gráf. Mivel

$$\pi\left(\sqrt{n}\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\ln n},$$

ezért a H gráf élszáma

$$k(H) \sim \frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{n}}{\frac{1}{2}\ln n}\right)^{3/2} \geq \frac{n^{3/4}}{(\ln n)^{3/2}}.$$

Ebből következik, hogy létezik $\pi(n) + \frac{n^{3/4}}{(\ln n)^{3/2}}$ méretű multiplikatív Sidon-sorozat, hiszen $\pi\left(\sqrt{n}\right)$ a „hibataghoz” képest is elhanyagolható. Ezzel igazoltuk a következő tételt:

6. tétel. *Léteznek olyan c_1, c_2 pozitív konstansok, hogy minden elegendően nagy n-re*

$$\pi(n) + c_1\frac{n^{3/4}}{(\ln n)^{3/2}} \leq F(n) \leq \pi(n) + c_2 n^{3/4}.$$

(*Például $c_1 = 1$, $c_2 = 11$ megfelelő konstansok.*)

Ezt a tételt Erdős 1938-ban bizonyította. Az alsó és a felső becslésben nem csak a fő tag egyezik, hanem a „hibatagok” is csak ln-hatvány szorzóban térnek el, azaz a becslés nagyon pontos. Érdekesség, hogy Erdős 31 évvel később a felső becslést $\pi(n) + c_2 \dfrac{n^{3/4}}{(\ln n)^{3/2}}$-re javította, így a hibatagok már csak konstans szorzóban térnek el.

Köszönetnyilvánítás. A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 Nemzeti Kiválóság Program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.