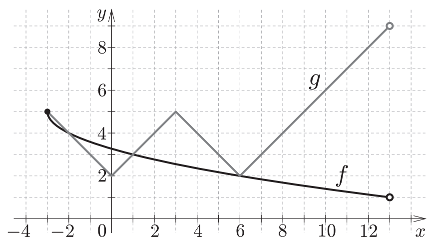
I. rész

1. *a) Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben az $f\colon x \in [-3; 13[,\ x \mapsto -\sqrt{x+3}+5$ függvényt.*
b) Ábrázoljuk az előzővel azonos koordinátarendszerben a $g\colon x \in [-3; 13[,\ x \mapsto \big|-|x-3|+3\big|+2$ függvényt.
c) Vizsgáljuk meg a függvényeket szélsőértékek szempontjából.
d) A függvényábrák segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $f(x) \geq g(x)$. (*11 pont*)

Megoldás. *a*) és *b*) A függvények képe az *ábrán* látható.



Az első esetben a $\sqrt{x}$ függvény képét megrajzolva, majd a tanult transzformációkat alkalmazva jutottunk a megfelelő képhez: $\sqrt{x+3}$, $-\sqrt{x+3}$, $-\sqrt{x+3}+5$. A második esetben az $|x|$ függvény képét megrajzolva, majd a tanult transzformációkat alkalmazva jutottunk a megfelelő képhez:

$$|x-3|, \quad -|x-3|, \quad -|x-3|+3, \quad |-|x-3|+3|, \quad \big|-|x-3|+3\big|+2.$$

c) Az f függvény esetén abszolút maximumhely az $x=-3$. Az ehhez tartozó maximumérték az $f(-3)=5$.
A g függvény esetén lokális maximumhely az $x=-3$ és az $x=3$. Az ezekhez tartozó lokális maximumérték az $f(-3)=f(3)=5$.
A g függvény esetén abszolút minimumhely az $x=0$ és az $x=6$. Az ezekhez tartozó minimumérték az $f(0)=f(6)=2$.
d) Az ábra alapján a $-\sqrt{x+3}+5 \geq \big|-|x-3|+3\big|+2 \quad (x \in [-3;13[)$ egyenlőtlenség megoldása: $x \in \{-3\} \cup [-2;1] \cup \{6\}$.

2. *Tekintsük a következő öt állítást:*
A: Nem létezik olyan pozitív egészekből álló, öttagú számtani sorozat, amelyre igaz, hogy bármely két elemének a legnagyobb közös osztója 1.
B: Ha egy síkbeli négyszög húrnégyszög, akkor létezik a síkjában egy olyan pont, amelytől a négyszög minden csúcsa azonos távolságra van.
C: Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma n^2.
D: Ha egy e egyenest 2014 db *különböző sugarú kör ugyanabban az E pontban érint, akkor e körök középpontjai egy egyenesre illeszkednek.*
E: Ha egy függvény periodikus, akkor képe szimmetrikus az y tengelyre.
a) Állapítsuk meg, hogy melyik állítás igaz, és melyik állítás hamis. Indokoljuk válaszainkat.
b) Írjuk fel a B és az E állítások megfordítását, és állapítsuk meg az igazságértéküket.
c) Fogalmazzuk meg egy mondatban a B állítást és a megfordítását. Igaz-e a kapott állítás?
d) Melyik a következő mondatok közül az E állítás tagadása?
I. *Ha egy függvény nem periodikus, akkor képe szimmetrikus az y tengelyre.*
II. *Van olyan periodikus függvény, melynek képe nem szimmetrikus az y tengelyre.* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Az A állítás hamis, ugyanis létezik olyan pozitív egészekből álló öttagú számtani sorozat, amelyre igaz, hogy bármely két elemének a legnagyobb közös osztója 1, például: 7; 13; 19; 25; 31.
A B állítás igaz, hiszen ha egy síkbeli négyszög húrnégyszög, akkor definíció szerint létezik olyan körvonal, amely minden csúcsát tartalmazza. Ennek a körvonalnak a középpontja a húrnégyszög minden csúcsától azonos távolságra van.
A C állítás hamis, hiszen egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma: 2^n.
A D állítás hamis. Amennyiben az állítás egy, az e egyenest tartalmazó konkrét síkra vonatkozna, akkor igaz lenne, viszont az állítás szövegében semmi nem utal arra, hogy a köröknek egy síkban kellene elhelyezkedniük.
Az E állítás hamis. Ellenpélda lehet például a szinusz függvény, amely periodikus, viszont nem páros, tehát képe nem szimmetrikus az y tengelyre.
b) A B állítás megfordítása: Ha egy síkbeli négyszög síkjában létezik egy olyan pont, amelytől a négyszög minden csúcsa azonos távolságra van, akkor a négyszög húrnégyszög. A B állítás megfordítása igaz.
Az E állítás megfordítása: Ha egy függvény képe szimmetrikus az y tengelyre, akkor a függvény periodikus. Az E állítás megfordítása hamis (nézzük például az x^2 függvényt).

c) A B állításnak és a megfordításának egy mondatban történő megfogalmazása: Egy síkbeli négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha létezik a síkjában egy olyan pont, amelytől a négyszög minden csúcsa azonos távolságra van. Ez az állítás igaz.

d) Az E állítás tagadása a II. mondat.

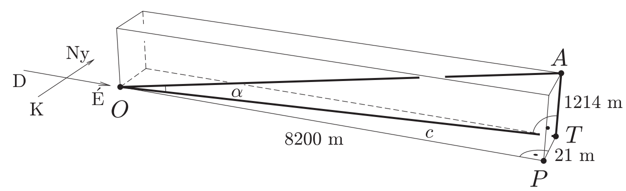
3. *Egy magashegységben meteorológiai kutatóállomás működik. A tereptárgyak pontos helyét térbeli koordinátarendszerbeli koordinátahármasok segítségével tartják nyilván, melynek egységét minden tengelyen* 1 méternek *választották, és origójában van a kutatóállomás. A koordinátarendszer x tengelye délről észak felé mutat, y tengelye keletről nyugat felé irányul, z tengelye pedig függőleges, és felfelé irányul. A pontok koordinátáit x, y, z sorrendben adják meg. A környéken három meghatározó hegycsúcs van, melyek koordinátái:* $A(8200;21;1214)$*;* $B(-28;7600;1021)$*;* $C(-1200;-4550;900)$.

a) *Melyik hegy van a kutatóállomástól megközelítőleg északi irányban? Milyen emelkedési szög alatt látja ennek a csúcsát a kutatóállomáson tartózkodó megfigyelő?*

b) *Mekkora az A, B és a C hegycsúcsok tengerszint feletti magassága, ha a* $K(5120;-4170;-4752)$ *pont éppen a tengerszinten található?*

c) *A kutatóállomásról havonta helikopter indul. A személyzet feladata az A, B és a C csúcsokon kihelyezett műszerekben az akkumulátorcsere. Mekkora utat tesz meg egy ilyen alkalommal a helikopter, ha a csúcsokat A csúcs, B csúcs, C csúcs sorrendben járja be, majd visszatér a kutatóállomásra?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A kutatóállomástól az A csúcs található közel északi irányban.



Az *ábra* jelöléseit használva (ahol O jelöli a kutatóállomást), az OPT derékszögű háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt: $c=\sqrt{8200^2+21^2}=\sqrt{67240441}\approx 8200{,}027$ m. Az OTA derékszögű háromszögre a tangens szögfüggvényt alkalmazva:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1214}{8200{,}027}\approx 0{,}1480,\quad \text{ebből}\quad \alpha\approx 8{,}42^\circ.$$

Vagyis az emelkedési szög kb. 8,42°.

b) A tengerszint feletti magasságok:

$$\begin{array}{lll} A \text{ csúcs:} & 4752+1214 & =5966 \text{ m;}\\ B \text{ csúcs:} & 4752+1021 & =5773 \text{ m;}\\ C \text{ csúcs:} & 4752+900 & =5652 \text{ m.}\end{array}$$

c) A helikopter által megtett távolság:

$$\begin{aligned}&d_{OA}+d_{AB}+d_{BC}+d_{CO}=\\ =&\sqrt{8200^2+21^2+1214^2}+\sqrt{(-28-8200)^2+(7600-21)^2+(1021-1214)^2}+\\ &+\sqrt{(-1200+28)^2+(-4550-7600)^2+(900-1021)^2}+\\ &+\sqrt{(-1200)^2+(-4550)^2+900^2}\approx 8289{,}41+11\,188{,}32+12\,206{,}99+4790{,}88=\\ =&\,36\,475{,}60 \text{ m.}\end{aligned}$$

4. *a*) *Egy számtani sorozat második eleme* $\frac{5\sqrt{5}-2}{3}$*, differenciája pedig* $\sqrt{5}+1$*. Mekkora az ötödik tag? Mennyi az első kilenc tag összege?*

b) *Ha egy számtani sorozat első tagjából levonunk kettőt, második tagjából levonunk egyet, és a harmadik tagjához hozzáadunk ötöt, akkor egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. Melyik ez a számtani sorozat, ha tudjuk, hogy a kapott mértani sorozat első két elemének összege egyenlő az eredeti számtani sorozat harmadik tagjával?*

c) *Számítsuk ki a következő határértéket:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}.$$ (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A sorozat ötödik tagja:

$$a_5=a_2+3\cdot d=\frac{5\sqrt{5}-2}{3}+3\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)=\frac{5\sqrt{5}-2+9\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{3}=\frac{14\sqrt{5}+7}{3}.$$

Az első kilenc tag összege:

$$\begin{aligned}S_9 &= a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9 = \\ &= (a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)+a_5+ \\ &\quad +(a_5+d)+(a_5+2d)+(a_5+3d)+(a_5+4d) = 9a_5 = \\ &= 9\cdot\frac{14\sqrt{5}+7}{3} = 42\sqrt{5}+21.\end{aligned}$$

b) A számtani sorozat első három eleme: a_1, a_1+d, a_1+2d. A mértani sorozat első három eleme: a_1-2, a_1+d-1, a_1+2d+5. A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$\begin{aligned}(a_1+d-1)^2 &= (a_1-2)\cdot(a_1+2d+5), \\ a_1^2+d^2+1+2a_1d-2a_1-2d &= a_1^2+2a_1d+5a_1-2a_1-4d-10, \\ d^2+2d-5a_1+11 &= 0.\end{aligned}$$

A szövegből tudjuk: $a_1-2+a_1+d-1=a_1+2d$, $a_1=d+3$. Ezt behelyettesítve az előző egyenletbe:

$$d^2+2d-5(d+3)+11=d^2-3d-4=0.$$

A másodfokú egyenlet két megoldása: $d_1=4$, $d_2=-1$. Ezek alapján az első tagra is két értéket kapunk: $(a_1)_1=7$, $(a_1)_2=2$. Az így kapott számtani sorozatok: 7, 11, 15, illetve 2, 1, 0.

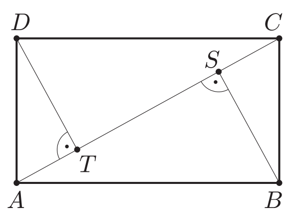
Ellenőrzés után látható, hogy a feladat szövegének csak a 7, 11, 15 felel meg, ez az egyedüli megoldás.

c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 0.\end{aligned}$$

II. rész

5. *Az ábrán látható téglalap alakú csempéről tudjuk, hogy* $DTA\sphericalangle = CSB\sphericalangle = 90^\circ$, *valamint* $AT = 6$ cm, $TS = 14$ cm.



a) *Mekkora egy ilyen csempe területe?*

b) *Hány db ilyen csempét kell rendelnünk egy* 25 m *alapkörsugarú,* 2,5 m *mély, henger alakú medence kicsempézéséhez, ha a vágások és a törések miatt* 15%-os *ráhagyás szükséges? (A csempéket csomagokban árusítják, de számításaink során ezzel ne foglalkozzunk.)*

c) *Hány fordulóval képes ezt egy* 4 *tonna teherbírású teherautó elhozni, ha egy csempe* 5 mm *vastag, és anyagának sűrűsége* 2520 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

d) *Rendelkezésünkre áll egy olyan szivattyú, amely a* 10 cm *átmérőjű csövében a vizet* 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ *sebességgel képes áramoltatni. Mennyi idő alatt tudja majd ez a szivattyú a színültig teletöltött medencét kiüríteni?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Szimmetriai tulajdonságok miatt: $AT=SC$ ($=6$ cm). Ebből adódik: $TC=TS+SC=20$ cm. Az ACD derékszögű háromszögre alkalmazva a magasságtételt: $DT=\sqrt{AT\cdot TC}=\sqrt{6\cdot 20}=\sqrt{120}$. Egy ilyen csempe területe:

$$2\cdot\frac{AC\cdot TD}{2}=26\cdot\sqrt{120}\approx 284{,}82\ (\text{cm}^2)=0{,}028\,482\ (\text{m}^2).$$

b) A medence méretei: $r=25$ m, $m=2{,}5$ m. A csempézendő felszín:

$$A=r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot m=25^2\cdot\pi+2\cdot 25\cdot\pi\cdot 2{,}5=750\cdot\pi\approx 2356{,}19\ (\text{m}^2).$$

A 15%-os ráhagyás miatt a szükséges csempemennyiség: $T = 2356{,}19 \cdot 1{,}15 \approx 2709{,}62$ (m^2). Mivel $2709{,}62 : 0{,}028\,482 \approx 95\,134$, ezért kb. 95 134 db csempét kell rendelni.

c) A csempe vastagsága: $d = 5$ mm $= 0{,}005$ m. A csempék össztérfogata:

$$V = T \cdot d = 2709{,}62 \cdot 0{,}005 = 13{,}5481 \text{ (m}^3\text{)}.$$

A csempe sűrűsége: $\varrho = 2520\ \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. A csempék össztömege:

$$\varrho \cdot V = 2520 \cdot 13{,}5481 = 34141{,}212 \text{ (kg)}.$$

Ez azt jelenti, hogy a 4 tonna teherbírású autónak 9 fordulóra lesz szüksége.

d) A medence térfogata: $V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 25^2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \approx 4908{,}74$ (m^3). A szivattyú másodpercenként egy henger alakú, 5 cm sugarú és 1 m magas vízoszlopot képes kiemelni, ez $0{,}05^2 \cdot \pi \cdot 1 = 0{,}007\,85$ (m^3) térfogatnak felel meg. A medence vízének kiemelése ezzel a szivattyúval

$$4908{,}74 : 0{,}00785 \approx 625\,317 \text{ s} \approx 173{,}7 \text{ h} \approx 7{,}24$$

napig tartana.

6. *a*) *Egy osztályba* 16 *fiú és* 14 *leány jár. Egy alkalommal* 11 *egyforma könyvet sorsolnak ki köztük úgy, hogy egy tanuló csak egy könyvet kaphat. Mennyi a valószínűsége, hogy fiú is és lány is lesz a nyertesek között?*

b) *Egy középiskolai menzán az ebédhez süteményt lehet választani. Kétféle sütemény van, édes és sós. A tapasztalatok szerint annak valószínűsége, hogy egy diák édes süteményt választ* 0,75. *Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy egymás után következő diákra nem lesz igaz, hogy azonos típusú süteményt választanak, ha mindegyikük pontosan egy süteményt visz magával?*

c) *Egy harminc fős alsó tagozatos osztályban van egy ikerpár. A tanító néni egy játékhoz véletlenszerűen két* 15 *fős csapatba fogja őket sorsolni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ikerpár két tagja nem azonos csapatba kerül?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A könyvek kisorsolása $\binom{30}{11}$ féle eredménnyel végződhet. $\binom{16}{11}$-féleképpen fordulhat elő, hogy csak fiú nyer könyvet, és $\binom{14}{11}$-féleképpen állhat a nyertesek csoportja csupa leánytanulóból. Az előzőekből adódik, hogy $\binom{30}{11} - \binom{16}{11} - \binom{14}{11}$-féleképpen fordulhat elő, hogy fiú is és lány is van a nyertesek között. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{30}{11} - \binom{16}{11} - \binom{14}{11}}{\binom{30}{11}} \approx 0{,}999\,91.$$

b) Legyen A esemény az, hogy négy egymást követő diák mindegyike édes süteményt választ, és B esemény az, hogy négy egymást követő diák mindegyike sós süteményt választ. Annak valószínűsége, hogy négy egymást követő diák mindegyike édes süteményt választ: $P(A) = 0{,}75^4 = 0{,}316\,406\,25$. Annak valószínűsége, hogy négy egymást követő diák mindegyike sós süteményt választ: $P(B) = 0{,}25^4 = 0{,}003\,906\,25$.

A feladat annak valószínűségét kérdezi, hogy az A és a B esemény egyike sem következik be. Mivel A és B egymást kizáró események, ez a következőképpen számolható: $P = 1 - P(A) - P(B) = 0{,}679\,687\,5$.

c) Tegyük fel, hogy lezajlott a véletlenszerű sorsolás, de mi nem ismerjük az eredményt. Ekkor egy tetszőlegesen kiválasztott A tanulóra igaz, hogy 14 csapattársa és 15 ellenfele van. Ha most véletlenszerűen kiválasztunk egy B tanulót, akkor annak valószínűsége, hogy nem csapattársak $\dfrac{15}{29}$, hiszen B ilyen valószínűséggel lehet a másik csapat 15 embere közül valamelyik.

Tehát bármely két tanulót kiemelve $\dfrac{15}{29}$ a valószínűsége, hogy nincsenek egy csapatban. Ez az ikerpárra is igaz, tehát a keresett valószínűség: $P = \dfrac{15}{29}$.

7. *a*) *Igazoljuk, hogy a* $2^{2n} - 1$ *minden pozitív egész* n *számra osztható hárommal.*

b) *Igazoljuk, hogy a* $\dfrac{n - n^3}{6}$ *kifejezés bármely* n *egész szám behelyettesítése esetén egész számot ad eredményül.*

c) *Hány pozitív osztója van a* $2014^{11} \cdot 11^{2014}$ *számnak?*

d) *Négyzetszám-e a* $3^{2014} - 1$? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ azonosságot alkalmazva a $2^{2n} - 1$ kifejezés (ahol n pozitív egész szám) átalakítható: $2^{2n} - 1 = (2^n - 1) \cdot (2^n + 1)$.

Mivel $(2^n - 1)$, 2^n, $(2^n + 1)$ három egymást követő pozitív egész szám, ezért valamelyik osztható hárommal. Mivel 2^n biztosan nem osztható hárommal, ezért a $2^n - 1$ és a $2^n + 1$ közül az egyik lesz a három többszöröse. Ez pedig azt jelenti, hogy a $(2^n - 1) \cdot (2^n + 1)$ szorzat, azaz a $2^{2n} - 1$ biztosan osztható hárommal, ha n pozitív egész szám.

b) Alakítsuk át az $\dfrac{n-n^3}{6}$ kifejezést, ahol n egész szám:

$$\frac{n-n^3}{6}=\frac{n\cdot(1-n^2)}{6}=\frac{n\cdot(1-n)\cdot(1+n)}{6}=-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n+1)}{6}=$$
$$=-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}.$$

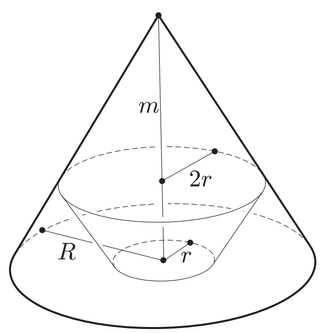
A számlálóban három egymást követő egész szám szorzata van, amiről tudjuk, hogy osztható hattal. (Biztos van köztük kettővel osztható szám, valamint biztos van köztük hárommal osztható szám.) Ez azt jelenti, hogy a $-\dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{6}$, azaz az $\dfrac{n-n^3}{6}$ egész szám minden egész n esetén.

c) Egy szám pozitív osztói számának meghatározásához szükség van a szám prímtényezős felbontására: $2014^{11}\cdot 11^{2014}=2^{11}\cdot 19^{11}\cdot 53^{11}\cdot 11^{2014}$. Vagyis a $2014^{11}\cdot 11^{2014}$ szám pozitív osztóinak száma: $(11+1)\cdot(11+1)\cdot(11+1)\cdot(2014+1)=$ 3 481 920.

d) Használjuk fel azt az ismeretet, hogy egy egész szám négyzete hárommal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat.

Mivel a $3^{2014}-1$ érték eggyel kisebb egy hárommal osztható számnál, ezért hárommal osztva kettő maradékot ad, tehát nem lehet négyzetszám.

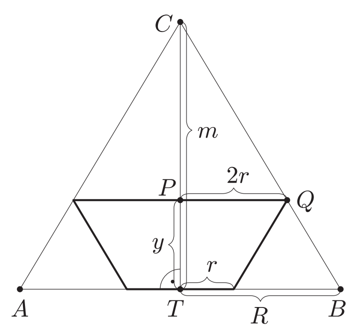
8. *A képen látható* $R=30$ cm *alapkörsugarú, és* $m=50$ cm *magasságú egyenes kúpba egyenes csonkakúpokat írunk a következő feltételekkel:*



– A csonkakúp kisebb alapkörének sugara a nagyobb alapköre sugarának felével egyenlő.
– A csonkakúp nagyobb alapkörének körvonala a kúp palástjára illeszkedik.
– A csonkakúp kisebb alapköre a kúp alapsíkjára illeszkedik.
a) Mennyi az ilyen csonkakúpok közül a maximális térfogatú magassága?
b) Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata, ha $r=\dfrac{R}{3}$? (*16 pont*)

Megoldás.

a) Használjuk az *ábra* jelöléseit, ahol y-nal jelöltük a csonkakúp magasságát. Keressük azt az y értéket, amelyre a keletkezett csonkakúp térfogata maximális.



Alkalmazva a párhuzamos szelőszakaszok tételét, mivel $PQ \parallel TB$, ezért felírható:

$$\frac{m-y}{2r}=\frac{m}{R},\quad \frac{50-y}{2r}=\frac{50}{30},$$

$$150-3y=10r, \quad y=\frac{150-10r}{3}.$$

A csonkakúp térfogata:

$$V=\frac{\left((2r)^2+(2r)\cdot r+r^2\right)\cdot y\cdot\pi}{3}=\frac{\left((2r)^2+(2r)\cdot r+r^2\right)\cdot\frac{150-10r}{3}\cdot\pi}{3}=$$
$$=\frac{7\cdot r^2\cdot(150-10r)\cdot\pi}{9}=\frac{70\cdot\pi}{9}\cdot\left(15r^2-r^3\right).$$

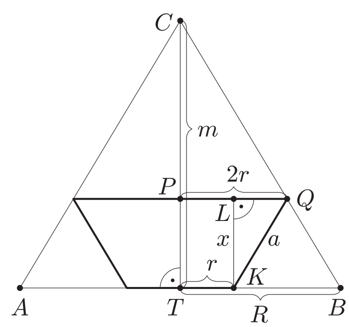
Keressük, hogy a térfogat milyen r értékre lesz maximális. Mivel a $\frac{70\cdot\pi}{9}$ konstans, ezért elég megkeresni, hogy a $15r^2-r^3$ kifejezés milyen r érték esetén maximális.

A kifejezés deriváltja: $\left[15r^2-r^3\right]'=30r-3r^2$. A kifejezés csak olyan r helyen lehet maximális, ahol a derivált értéke 0, azaz $3r\cdot(10-r)=0$. Vagyis $r=0$ és $r=10$ esetén 0 a derivált. Mivel $r=0$ esetén nem keletkezik csonkakúp, ezért csak az $r=10$ esetén képzelhető el, hogy maximális lesz a térfogat.

A $15r^2-r^3$ kifejezés második deriváltja: $\left[15r^2-r^3\right]''=30-6r$. A második derivált az $r=10$ esetén negatív, tehát a $15r^2-r^3$ kifejezésnek $r=10$ esetén valóban maximuma van. Vagyis a keletkezett csonkakúp térfogata akkor lesz maximális, ha $r=10$ cm. Alkalmazva az $y=\frac{150-10r}{3}$ összefüggést kapjuk: $y=\frac{50}{3}$ cm.

Tehát a maximális térfogatú csonkakúp magassága pontosan $\frac{50}{3}$ cm.

b) Ismét az *ábra* jelöléseit használva alkalmazhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét. Mivel $PQ\parallel TB$, ezért felírható: $\frac{m-x}{2r}=\frac{m}{R}$. Tudjuk, hogy $r=\frac{R}{3}$, ezért egyenletünk a következőképpen módosul: $\frac{m-x}{2r}=\frac{m}{3r}$, $3\cdot(m-x)=2m$, $x=\frac{m}{3}$. Kaptuk, hogy a csonkakúp magassága $x=\frac{50}{3}$ cm, és mivel $r=\frac{R}{3}=\frac{30}{3}=10$ cm, ezért a csonkakúp nagyobb alapkörének sugara $2r=20$ cm, a kisebb alapkörének sugara pedig $r=10$ cm.



A csonkakúp térfogata:

$$V=\frac{\left((2r)^2+(2r)\cdot r+r^2\right)\cdot x\cdot\pi}{3}=\frac{\left(20^2+20\cdot10+10^2\right)\cdot\frac{50}{3}\cdot\pi}{3}=\frac{35000\cdot\pi}{9}\approx$$
$$\approx 12\,217{,}3\ (\mathrm{cm}^3).$$

A csonkakúp a alkotója a KLQ derékszögű háromszögből számolható Pitagorasz-tétel segítségével: $a^2=x^2+r^2=\left(\frac{50}{3}\right)^2+10^2=\frac{3400}{9}$, $a=\frac{10\sqrt{34}}{3}$. A csonkakúp felszíne:

$$A=(2r)^2\cdot\pi+r^2\cdot\pi+(2r+r)\cdot a\cdot\pi=400\cdot\pi+100\cdot\pi+100\cdot\sqrt{34}\cdot\pi\approx 3402{,}64\ (\mathrm{cm}^2).$$

9. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\frac{\sin^4 x+2\cos x}{2\cos^4 x+2}=\sqrt{2}^{\,(-\sin^2 x-\cos^2 x-1)}.$$

b) *Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:*

$$\lg\left(\frac{a^2}{3bc}+\frac{b^2}{3ac}+\frac{c^2}{3ab}\right)\geq 0,$$

ahol a, b, c tetszőleges pozitív valós számok. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet bal oldalának nevezőjében található $2\cos^4 x+2$ kifejezés biztosan pozitív, tehát az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza.

Az egyenlet jobb oldalán a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést alkalmazva, és további átalakításokkal kapjuk:

$$\frac{\sin^4 x + 2\cos x}{2\cos^4 x + 2} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{2},$$

$$\sin^4 x + 2\cos x = \cos^4 x + 1, \quad \sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos x.$$

Alkalmazva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, valamint a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggéseket:

$$\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = 1 - 2\cos x,$$
$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\cos x.$$

Újra alkalmazva a $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ összefüggést: $1-2\cos^2 x = 1-2\cos x$. Rendezve a kapott egyenletet: $\cos^2 x-\cos x = 0$, $\cos x(\cos x - 1) = 0$.

I. eset: Ha $\cos x = 0$, akkor $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$.

II. eset: $\cos x = 1$, akkor $x_2 = 2k_2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$.

b) A bizonyítandó egyenlőtlenség jobb oldalát átalakíthatjuk:

$$\lg\left(\frac{a^2}{3bc} + \frac{b^2}{3ac} + \frac{c^2}{3ab}\right) \geq \lg 1.$$

A logaritmusfüggvény szigorú monoton növekedése miatt: $\dfrac{a^2}{3bc} + \dfrac{b^2}{3ac} + \dfrac{c^2}{3ab} \geq 1$. Mivel a, b, c tetszőleges pozitív valós számok, ezért ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk az abc kifejezéssel, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc = \sqrt[3]{a^3b^3c^3}.$$

A kapott egyenlőtlenség igaz, hiszen ez az a^3, b^3, c^3 pozitív számokra a számtani és a mértani közép közötti összefüggés.

A gondolatmenet során végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti állítás is igaz.