[1]

# I. rész

**1.** Mutassuk meg, hogy nincs olyan valós számpár, amelyre

$$\left.\begin{array}{l}(x^2+5)^2 = 25-|y-3| \\ 21x+63y=188\end{array}\right\}.$$

(*11 pont*)

**2.** Egy óra számlapja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög. A mutatókat a háromszög középpontjában rögzítették úgy, hogy 12 órakor az egyik csúcs felé mutatnak.
*a*) Milyen hosszú lehet a nagymutató, ha soha nem nyúlik túl az óra számlapján?
*b*) Három órakor a két mutató által meghatározott két félegyenes mekkora területű részt jelöl ki az óra számlapjából? (*12 pont*)

**3.** Egy egyfordulós röplabdakupán – ahol tehát bármely két csapat pontosan egyszer játszik egymással – 30 lejátszott mérkőzés után még minden csapatnak három mérkőzése volt hátra. Hány csapat szerepelt a kupán? (*14 pont*)

**4.** Határozzuk meg az $A\cap B$ halmazt, ha $A=\left\{x\in\mathbb{R} \mid 3(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)=2\sqrt{3}\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R} \mid |x|\le 2\right\}$. (*14 pont*)

# II. rész

**5.** A $10^n+14^n+15^n+21^n$ kifejezésben az $n$ 3-mal osztható pozitív páratlan egész számot jelöl.
*a*) Igazoljuk, hogy a négytagú összeg minden ilyen $n$ esetén osztható lesz 1260-nal.
*b*) A négytagú összeg két tagját véletlenszerűen kiválasztjuk. Mekkora valószínűséggel lesz a két tag összege hárommal osztható? (*16 pont*)

**6.** Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk. (*16 pont*)

**7.** Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=8x^3-6x-1$ hozzárendeléssel megadott függvénynek három különböző zérushelye van és ezek közül a legnagyobb: $x_1=\cos\dfrac{\pi}{9}$. (*16 pont*)

**8.** Egy derékszögű háromszög beírt körének sugara 2, a befogókhoz hozzáírt köreinek sugara 3 és 10. Mekkora az átfogóhoz hozzáírt kör sugara? (*16 pont*)

**9.** Egy pihenőpark használatáért az üzemeltető pénzt szeretne kapni, ezért két lehetőséget dolgoztatott ki. Az első változat szerint lenne 12 órás és 6 órás jegy. A 12 órás jeggyel nyitástól zárásig bent lehet lenni 1000 Ft-ért, a 6 órás jegy ára pedig 600 Ft lenne. A második változat szerint lenne 3 órás jegy 350 Ft-ért, 6 órás jegy 600 Ft-ért, 9 órás jegy 850 Ft-ért és az ezt meghaladó időre szóló jegy 1250 Ft-ért. Megfigyeltek 150 látogatót és a következő gyakoriság adódott:

| időtartam (h) | 0–1 | 1–2 | 2–3 | 3–4 | 4–5 | 5–6 | 6–7 | 7–8 | 8–9 | 9–10 | 10–11 | 11–12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gyakoriság (fő) | 6 | 7 | 11 | 18 | 25 | 26 | 20 | 16 | 15 | 4 | 2 | 0 |

*a*) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel az első változat szerint?
*b*) Mennyi lesz az adatok alapján az egy főre eső átlagos bevétel a második változat szerint?
*c*) Egy harmadik változatban 4, 8 és 12 órás jegyeket lehetne vásárolni, melyek ára arányos lenne az időtartammal. Milyen áron kellene adni ezeket a jegyeket, ha a rendelkezésre álló adatok alapján az egy főre eső átlagos bevételként 700 Ft körüli értéket szeretne kapni az üzemeltető és a jegyek ára 10-zel osztható? (*16 pont*)

[1] *Számadó László* 1999 szeptemberétől volt szerkesztőségünk tagja. 2004-től szerkesztette az Emelt szintű gyakorló feladatsorokat, melyek egy részét ő is állította össze. Sajnos nem tudja tovább e feladatokat vállalni. Most egy válogatást közlünk az eddigi feladatsoraiból.