KEZDŐK

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2013?

2. Egy 34 fős osztályban ugyanannyi fiú van, mint lány. Igaz-e, hogy ha leülnek egy kerek asztal köré, akkor minden esetben lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány?

3. Az a, b pozitív valós számokra az $a+b$, $a-b$, ab és $\frac{a}{b}$ kifejezések értéke növekvő sorrendben $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$ és $\frac{7}{4}$. Melyik ez a két szám?

4. Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög $60°$-os. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőt a C csúcshoz tartozó belső, illetve külső szögfelező rendre az E, illetve F pontban metszi. Mekkora az EC és az FE szakaszok hosszának aránya?

Második forduló

1. Oldja meg az alábbi egyenletet a racionális számok halmazán!

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=(2x-1)\cdot(2x-2)\cdot(2x-3)\cdot(2x-4)$$

2. Hány olyan pozitív egész szám van, amelynek szomszédjai prímszámok, és a szám nem osztható 6-tal?

3. Egy 3 házaspárból álló 6 fős társaság elhatározza, hogy úgy ünneplik meg a karácsonyt, hogy mindegyikük megajándékozza a társaság egy másik tagját. Ehhez mindenki felírja a nevét egy cédulára, a cédulákat beleteszik egy kalapba majd mindenki húz egy cédulát a kalapból. A kihúzónak azt a személyt kell megajándékoznia, akinek a neve a kihúzott cédulán szerepel. A lehetséges esetek hányad részében fordul elő, hogy a 6 húzás során nem lesz olyan személy, aki önmagát vagy a házastársát húzza ki?

4. Az AD egységnyi hosszú szakasz mint átmérő fölé rajzolt félkörív egy pontja B, a BD ív egy további pontja C, és jelölje E a BD és AC szakaszok metszéspontját. Határozza meg az $AE\cdot AC+DB\cdot DE$ kifejezés pontos értékét!

5. Melyik a legnagyobb n természetes szám, amelyre $5^{(2^{2013})}-1$ osztható 2^n-nel?

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozza meg azokat az x, y, z valós számokat, amelyek megoldásai az alábbi egyenletrendszernek!

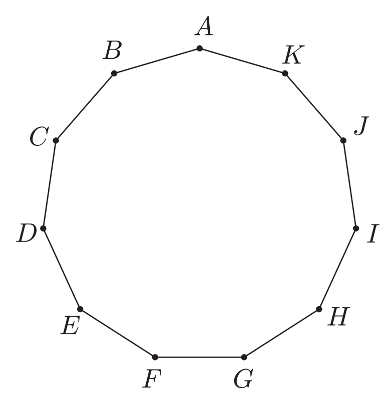
$$\left.\begin{aligned} x+[y]+\{z\}&=3{,}4\\ [x]+\{y\}+z&=4{,}5\\ \{x\}+y+[z]&=5{,}3\end{aligned}\right\}$$

($[a]$ az a valós szám egészrészét jelöli, azaz azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb, mint a. $\{a\}$ az a valós szám törtrészét jelöli, azaz az a számnak és a egészrészének a különbségét: $\{a\}=a-[a]$.)

2. *a*) Adjon meg egy olyan különböző pozitív egész számokból álló 10 elemű halmazt, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

b) Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan különböző pozitív egész számokból álló 11 elemű halmaz, amelyre teljesül, hogy bármely 6 elemének összege nem osztható 6-tal!

3. Adott az a oldalhosszúságú $ABCDEFGHIJK$ szabályos 11-szög. Legyen az AE átlónak és a CF átlónak a metszéspontja M!



Bizonyítsa be, hogy fennáll az $AF = AM + a$ összefüggés!

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória első fordulós feladatsorával.

Második forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulós feladatsorával.

Harmadik (döntő) forduló

1. Hány olyan tízjegyű természetes szám van, amelyben az 1, 2 és 3 számjegyek mindegyike legalább kétszer szerepel és ezeken a számjegyeken kívül más számjegy nincs a számban?

2. Legyen A, B és C ebben a sorrendben egy egyenes három pontja. Szerkesszük meg az egyenes azonos oldalára az ABD és BCE szabályos háromszögeket. Bizonyítsuk be, hogy ha az AE egyenest tükrözzük DC egyenesre, akkor a tükörkép átmegy a B ponton!

3. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az $x^4 + 4 = py^4$ egyenlet megoldható az egész számok körében.

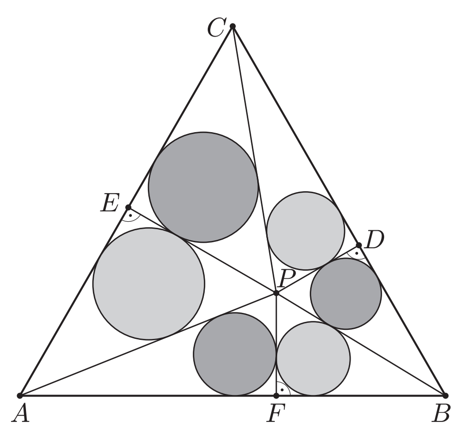
III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

Megegyezik az I. kategória második fordulós feladatsorával.

Második (döntő) forduló

1. Legyen P az ABC szabályos háromszög egy belső pontja, D, E, F pontok pedig a P-ből a BC, CA és AB oldalakra állított merőlegesek talppontjai.



Bizonyítsuk be, hogy a PAF, PBD, PCE, illetve PAE, PBF, PCD háromszögek beírt köreinek sugarait összegezve ugyanazt az értéket kapjuk.

2. Mely $n \geq 3$ egész számok esetén létezik n darab páronként különböző pozitív egész szám úgy, hogy mindegyik osztója a többi összegének?

3. Az $1, 2, \ldots, 2015$ számok közül legfeljebb hányat lehet úgy kiválasztani, hogy a kiválasztottak közül semelyik két különbözőnek az összege nincs a kiválasztottak között? Adjuk meg az összes olyan kiválasztást, amellyel a lehető legtöbb számot kiválaszthatjuk.

HALADÓK

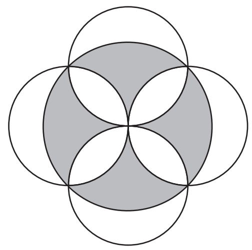
I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Ha $A = 1\,111\,111\,111$ és $B = 111\,111$, akkor mennyi A és B legnagyobb közös osztója?

2. Mennyi az $f(x) = \left|x^2 - x\right| + \left|x^2 + 3x + 2\right|$ függvény legnagyobb és legkisebb értéke a $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ zárt intervallumon? Mely helyeken veszi fel ezeket az értékeket?

3. Mekkora a színezett részek területeinek összege, ha a kis körök sugara r?



4. Legyen $A = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)$, $C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Bizonyítsuk be, hogy a $K = \sqrt{(A + B - C) \cdot n + 2}$ kifejezés értéke minden n természetes szám esetén irracionális!

5. Egy kocka csúcsait megcímkézzük az $1, 2, \ldots, 8$ számokkal (minden címkét pontosan egy csúcsra írunk fel). A kocka egy lapjának értéke: a lapot határoló csúcsokon lévő számok összege.

Legfeljebb mekkora lehet egy kocka legkisebb értékű lapjának értéke?

Második forduló

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az $\left|f(0) - 1\right|$, $\left|f(1) - 3r\right|$, $\left|f(2) - 9\right|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

2. Határozzuk meg azokat a négyjegyű számokat, ahol az első két számjegyből álló szám és az utolsó két számjegyből álló szám összegének négyzete egyenlő az eredeti számmal!

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle = 60^\circ$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek. (A négyszög középvonalainak a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat nevezzük.)

4. Soma az ötödik születésnapi bulijára 5 barátját hívhatta meg. El is készült az 5 névre szóló meghívó, és készült hozzá 5 felcímzett boríték is. Soma azonban még nem tud olvasni, és úgy rakta be a borítékokba a meghívókat, hogy végül senki sem a sajátját kapta kézhez. Hányféleképpen lehet így elrendezni a meghívókat?

Harmadik (döntő) forduló

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és …

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(… barátom barátja a barátom …)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(… ellenségem ellensége a barátom …)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy $r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$.

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív szám, amelynek a 10-es számrendszerbeli alakja 28-ra végződik, és számjegyeinek összege 28?

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)=120.$$

3. Az ABC háromszög AB oldalának A-n túli meghosszabbításán felvettük a P pontot, a BC oldal B-n túli meghosszabbításán az R pontot, végül az AC oldal A-n túli meghosszabbításán a Q pontot úgy, hogy $AP=AB$, $CB=BR$ és $CA=AQ$. Mennyi a PQR háromszög területe, ha az ABC háromszögé 100 cm^2?

4. Osztható-e 81-gyel a 81 darab egyesből álló szám?

5. Egy 2013×2013 méretű táblázat minden mezőjébe az 1-től 2013-ig terjedő egész számok valamelyikét írtuk be úgy, hogy semelyik sorba nem kerültek egyenlő számok, és a táblázat szimmetrikus lett az egyik átlójára. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ebben az átlóban sem fordulnak elő egyenlő számok.

Második forduló

1. Legyen $f(x)=ax+b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az $\left|f(0)-1\right|$, $\left|f(1)-3\right|$, $\left|f(2)-9\right|$ számok mindegyike 1-nél kisebb.

2. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben $a^2+4m_a^2\leq(b+c)^2$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak hosszát, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot jelenti!

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2+y^2=6x^2+12$ egyenletet!

4. Legyen $H=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.
H egy nemüres részhalmazát *átlagosnak* hívjuk, ha a benne szereplő számok átlaga megegyezik 5-tel (pl. az $L=\{3;4;8\}$ ilyen).
Hány átlagos részhalmaza van H-nak?

Harmadik (döntő) forduló

1. Adjunk meg a síkban 7 pontot úgy, hogy közülük bármely 4 között mindig legyen 3 olyan, hogy azok, mint csúcsok derékszögű háromszöget határozzanak meg.

2. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy az $A_n=2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ számnak legalább n különböző prímosztója van.

3. Mennyi az $f(x)=x^{2014}+2x^{2013}+3x^{2012}+\ldots+2013x^2+2014x+2015$ függvény legkisebb értéke?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Legyenek a, b, c és d olyan valós számok, amelyekre $ab=1$ és $ac+bd=2$. Bizonyítsuk be, hogy $cd\leq 1$.

2. Egy bizottság 40-szer ülésezett. Mindegyik ülésen 10 fő volt jelen. A bizottság bármelyik 2 tagja legfeljebb egy ülésen volt együtt. Bizonyítsuk be, hogy a bizottság legalább 64 tagból áll!

3. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre a

$$p+1=2x^2, \tag{1}$$
$$p^2+1=2y^2. \tag{2}$$

egyenletrendszernek van egész megoldása?

4. Legyen a P pont az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának tetszőleges pontja. A P pont merőleges vetülete AC-n az R, BC-n a Q pont. Bizonyítsuk be, hogy
a) Az RQ szakaszok felezőmerőlegesei egy ponton mennek át;
b) P-ből az RQ szakaszra bocsátott merőlegesek is egy ponton mennek át!

5. Egy $n \times n$-es tábla egyik mezőjén áll egy bábu. Egy lépésben mozoghatunk egyet fel, vagy egyet jobbra, vagy átlósan balra lefele egyet. Lehetséges-e, hogy a táblát úgy járjuk be, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk, és végül a kiindulási mezőtől eggyel jobbra érkezünk meg?

Második (döntő) forduló

1. Az x, y, z *pozitív egész* számokról tudjuk, hogy *relatív prímek,* és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x \cdot y \cdot z$ négyzetszám!

2. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök A-ban és B-ben metszik egymást. Az A-n átmenő közös szelőjük a köröket még C és D pontokban is metszi. (C k_1-en, D k_2-n van.) A CO_1 és DO_2 egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk, hogy O_1, O_2, M és B egy körön vannak.

3. Egy $A=\{a_1;a_2;\ldots;a_k\}$ halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.
(Vagyis pl. az $A=\{2;3;5\}$ halmaz súlya: $2\cdot3\cdot5=30$.)
Tekintsük a $H=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{2014}\right\}$ halmazt! Mennyi H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?
(Ez pl. az $A=\{2;3;5\}$ halmaznál $2\cdot3+2\cdot5+3\cdot5=31$ lenne.)