1. Bevezetés

A hitelek a gazdaságban jelentős szerepet játszanak, és matematikai modellezésük sem csupán könyvelőknek való feladat. Különösen nehéz probléma a hosszú távú hitelek (jelzálog-, diákhitelek stb.) tervezése, hiszen az évtizedekre terjedő törlesztési folyamat során nagyon megváltozhat a kiinduló helyzet. Ebben a cikkben röviden bemutatom a hiteltörlesztési folyamat három legegyszerűbb modelljét. 1. A hagyományos modellt, ahol a törlesztési pálya tervezésénél nem veszik figyelembe az inflációt, és a törlesztési részlet időben állandó. 2. Az ún. kettősen indexált jelzálog (angolul: Dual Indexed Mortgage, röviden: DIM) modelljét, ahol az infláció figyelembevétele miatt a törlesztési részlet vásárlóértéke időben állandó. 3. A devizaalapú jelzáloghitel modelljét, amelyben a forinthitel és törlesztése egy árnyékként számolt devizaalapú hitel és törlesztés átváltásából adódik.

A képletek egyszerűsítése miatt kamatláb helyett kamattényezővel (1 + kamatláb), inflációs ráta helyett inflációs tényezővel (1 + inflációs ráta) számolunk. Ugyanezért eltekintünk a kamatláb, az inflációs ráta és a forint leértékelődés időbeli változásától.

2. Hagyományos hitel

A hiteltörlesztési folyamatot általában folyóáron – az infláció figyelembe vétele nélkül – tervezik a bankok. Legyen $D_0 > 0$ a hitel kezdőértéke, $T > 1$ a törlesztési idő és legyen $t = 1, 2, \ldots, T$ a hiteltörlesztési időszakok (általában hónap, de itt év) indexe. A t-edik időszak (végi) törlesztése B_t, az időszaki kamattényező ($= 1 + \text{kamatláb}$) R, és az időszakvégi adósság D_t.

Definíció szerint igaz a következő azonosság:

$$\text{új adósság} = \text{régi adósság} + \text{kamat} - \text{törlesztés},$$

$$D_t = RD_{t-1} - B_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1, T, \qquad D_0 \quad \text{adott.} \tag{1}$$

Figyelem: a köznyelv gyakran kamatnak nevezi a kamatlábat, holott az első $(R-1)D_t$, a második $R-1$.

Szükségünk lesz a (B_t) törlesztési sorozat *jelenértékére,* amelyet angol kezdőbetűi nyomán (present value) PV-vel rövidítünk. Definíció szerint a pénzfolyamat jelenértéke az a szám, amelynek megfelelő tőkét elhelyezve a hitel felvételekor a bankban, és a hitelkamatlábbal kamatoztatva az esedékes törlesztésekig, a hitelfelvevő éppen ki tudná fizetni az adósságát.

1. segédtétel. *A (B_t) törlesztési sorozat jelenértéke*

$$\mathrm{PV} = \frac{B_1}{R} + \frac{B_2}{R^2} + \cdots + \frac{B_T}{R^T}. \tag{2}$$

Bizonyítás. Gondoljuk azt, hogy a hitel felvételekor a hitelfelvevő T kamatozó bankbetétet képez, és a t-edikbe betesz $R^{-t}B_t$ forintot, $t = 1, \ldots, T$. A kamatos kamat miatt a t-edik időszak végére a t-edik betét éppen B_t-re duzzad, tehát ebből tudja fizetni az esedékes törlesztést. Ha összeadjuk a bankbetétek értékét, adódik (2). $\square$

Ésszerű feltevés, hogy a hitelérték éppen a törlesztési sorozat jelenértéke: $D_0 = \mathrm{PV}$. A valóságban azonban a kamatlábrés (= hitelkamatláb − betéti kamatláb) miatt a hitelkamatláb jóval nagyobb, mint a betéti kamatláb. A jelzáloghitel esetében azonban a kamatlábrés nem túl jelentős.

A hagyományos hitelnél időben változatlan a törlesztés: $B_t = B$. Igaz az

1. tétel. *A T futamidő esetén a $D_0 > 0$ nagyságú hitel időben állandó törlesztőrészlete*

$$B = \frac{(R-1)D_0}{1 - R^{-T}}, \qquad R > 1. \tag{3}$$

Bizonyítás. $B_t = B$ esetén (2)-ben alkalmazható a mértani sorozat összegképlete:

$$D_0 = \mathrm{PV} = R^{-1}\frac{1 - R^{-T}}{1 - R^{-1}}B.$$

Rendezéssel adódik (3). $\square$

[1] Köszönetemet fejezem ki *Király Júliának,* hogy lehetővé tette, hogy a készülő közös munkánk egy részét hasznosíthassam a KöMaL-ban.

A valóságban a kamattényező idővel változik, s e miatt a bank akár minden időszakban újraszámolhatja az esedékes törlesztési részletet, miközben felteszi, hogy a kamattényező a következőkben már nem változik. Ezzel a fontos bonyodalommal azonban ebben a cikkben nem foglalkozunk.

A következő feladat egy szakemberek által is gyakran figyelmen kívül hagyott jelenségre hívja föl a figyelmet. (Megoldás a cikk végén.)

1. feladat. Jelölje $B(T)$ a T futamidőhöz tartozó törlesztést. Igazoljuk, hogy $B(T) = B(2T)\big(1 + R^{-T}\big)$, ezért $R > 1$ esetén a futamidő megduplázása nem felezi a törlesztőrészletet: $B(2T) > B(T)/2$!

Egyszerűsége miatt érdemes az öröktörlesztést külön is bemutatni.

1. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, akkor

$$B = (R-1)D_0 \quad \text{és} \quad D_t = D_0. \tag{3'}$$

Ebből leolvasható, hogy a változatlan törlesztőrészlet a kamattal egyenlő. Az is látszik, hogy nagyobb, például 10%-os éves kamatláb esetén képtelenség[2] egy 10 mFt-os hitelt törleszteni, hiszen csak az éves kezdőrészlet 1 mFt lenne.

A jelzáloghitel egyik legnagyobb problémája, hogy modern gazdaságban – a válságoktól eltekintve – az általános árszínvonal emelkedése (köznapi nyelven: az infláció) nem hanyagolható el. Ennek vizsgálatában visszatérünk a változó törlesztésű pályához: (B_t). Legyen az időben állandó inflációs tényező: p, és a t-edik időszakvégi halmozott árindex: $P_t = p^t$, $P_0 = 1$. Osszuk el az (1) egyenlet mindkét oldalát P_t-vel:

$$\frac{D_t}{P_t} = \frac{R}{p}\frac{D_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{B_t}{P_t}. \tag{5}$$

Ezen a ponton bevezetjük a reálkamat-tényezőt, a reáltörlesztést és a reál-adósságállományt:

$$r = \frac{R}{p}, \qquad b_t = \frac{B_t}{P_t} \quad \text{és} \quad d_t = \frac{D_t}{P_t}. \tag{6}$$

A korábbi változókat *nominális* jelzővel különböztetjük meg reáltársaiktól. Figyeljük meg, hogy a nominális kamattényezőt az éves inflációs tényezővel osztottuk, a törlesztőrészletet és az adósságot viszont az árszinttel.

(6) segítségével (5) egyszerűsíthető:

$$d_t = rd_{t-1} - b_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad d_0 \quad \text{adott}. \tag{7}$$

Szóban: új reáladósság = régi reáladósság + reálkamat − reáltörlesztés.

Kitérőként megemlítjük, hogy rossz hagyományként a közgazdászok a reálkamatlábat gyakran azonosítják a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbségével. Ez azonban csak néhány százalékos ráták esetén elfogadható közelítés, amikor

$$r - 1 = \frac{R}{p} - 1 = \frac{R-p}{p} \approx (R-1) - (p-1), \quad \text{ha} \quad R, p \approx 1.$$

A képletek jobb megértését számpéldákkal segítjük. Alapadatok: a hitel futamideje: $T = 20$ év, a hitel összege: $D_0 = 10$ mFt.

Bár a nominális kamatláb és az inflációs ráta részben független egymástól, szemléltetésünkben célszerű a reálkamattényezőt rögzíteni: $r = 1{,}06$. Az *1. táblázatban* azt nézzük meg, hogyan hat az inflációs ráta növekedése az éves törlesztési részletre. Állandó árszintnél a törlesztés 872 eFt, 6%-osnál már 1369 eFt – ez már kifizethetetlen[3]. Persze, az évek múltával a törlesztés reálértéke időben egyre inkább csökken. Nulla infláció esetén a zárótörlesztés reálértéke 872 eFt, s 6%-os infláció esetén 427 eFt-ra csökkenne, ha kifizethető lett volna.

1. táblázat. Az infláció hatása az éves induló és záró törlesztésre, eFt

Inflációs index p	Nyitó törlesztés B	Záró reál törlesztés b_T
1,00	872	872
1,03	1110	614
1,06	1369	427

Megjegyzés. Reálkamat-tényező: $r = 1{,}06$, nominálkamat-tényező: $R = rp$, záró törlesztés reálértéke: $b_T = B/p^T$.

3. Kettősen indexált törlesztés

[2] A mai átlagos jövedelmekhez viszonyítva.
[3] A mai átlagos jövedelmekhez viszonyítva.

1975 körül *Franco Modigliani* (Nobel-emlékdíjas közgazdász) választ keresett a gyors infláció okozta kezdőtörlesztési gondokra. Megoldásként az ún. *kettősen indexált hitelt* javasolta, ahol nemcsak a reálkamat-tényező, hanem a b_t reáltörlesztés is állandó: $r_t = r$ és $b_t = b$. Ekkor (7) tovább egyszerűsödik:

$$d_t = rd_{t-1} - b, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{8}$$

Az 1. tétel helyére lép a

2. tétel. *Ha a reálkamat-tényező állandó és a bank úgy állapítja meg az esedékes hiteltörlesztést, hogy a reáltörlesztés minden időszakban állandó legyen, akkor a reáltörlesztés*

$$b = \frac{(r-1)D_0}{1 - r^{-T}}, \qquad r > 1; \tag{9}$$

míg a reáladósság (8) *szerint alakul.*

Visszatérünk 1. példánkhoz.

2. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és kettősen indexált törlesztést alkalmaz a bank, akkor a törlesztőrészlet

$$b = (r-1)D_0. \tag{3''}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan reálértékű törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a reálkamatlábbal egyenlő. Alacsony éves reálkamatláb esetén még magas nominálkamatláb mellett is törleszthető a kezdőrészlet.

A *2. táblázatban* azt vizsgáljuk, hogyan hat a reálkamat-tényező emelkedése a kettősen indexált hitel törlesztésére. 0%-os reálkamatlábnál fejből tudjuk az eredményt: 10/20 = 500 eFt; 3%-os reálkamatlábnál az éves törlesztés 672 eFt, de 6% esetén már 872 eFt! (Az 1. táblázat 1. sora.)

2. táblázat. A reálkamatláb hatása az éves törlesztésre: DIM

Reálkamat-tényező r	Éves törlesztés (eFt) b
1,00	500
1,03	672
1,06	872

A 2. feladat a két típusú hitel érdekes különbségét emeli ki. (Megoldás a cikk végén.)

2. feladat. Mutassuk meg, hogy a hagyományos hitelnél a nominális adósság időben monoton csökken, míg a kettős indexálású hitelnél a monotonitás csak akkor igaz, ha az inflációs tényező elegendően kicsi, nevezetesen ha

$$p < \frac{1 - r^{-T}}{1 - r^{-T+1}}.$$

Például $r = 1{,}03$ reálkamat-tényező esetén az infláció ráta legfeljebb csak 3,9% lehet: $p < 1{,}039$, ha a tartozást monoton csökkenőnek akarjuk.

Egyébként a magyar diákhitel is a kettős indexálású hitelhez hasonlít, csak a futamidő változó, és a törlesztőrészlet a mindenkori egyéni kereset rögzített százaléka. Állandó reálkereset esetén a törlesztési pálya azonossá válik a kettős indexálású pályával.

4. Devizaalapú-hitel

Alacsonyabb és stabilabb kamatlábak, valamint elhanyagolható infláció, és kedvező árfolyamok miatt számos országban a hazai valuta helyett valamilyen más ország devizája alapján számolják el a jelzálog- (és egyéb) hiteleket. Magyarországon 2004 után terjedt el ez a forma, és az alacsonyabb kamatlábak és stabil árfolyam miatt a svájci frank nemcsak a forint-, de az eurókölcsönöket is kiszorította. 2008-ban azonban beütött a nemzetközi pénzügyi és gazdasági válság. Míg az euró forint árfolyama 250-ről csak 300-ra (20%-kal) nőtt, addig a svájci franké 150-ről 250-re (67%-kal) ugrott. Emellett a devizakamatláb is nőtt.

Új modellünkben is állandó paraméterértékekre szorítkozunk, de a forint adósság helyére egyelőre a devizában kifejezett adósság lép ($*$-gal jelölve a devizában adott kamattényezőt, adósságot és törlesztőrészletet):

$$D_t^* = R_t^* D_{t-1}^* - B_t^*, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad 1 < R^* < R. \tag{10}$$

Mivel a *devizaalapú* hitelnél a devizában kifejezett adósságot (D_t^*) és a törlesztést (B_t^*) a bank minden időszakban forintra számítja át, ezért szükségünk lesz a külső valuta árfolyamára (a hazai valutában kifejezve): E_t, és időben állandónak feltételezett relatív változására:

$$e = E_t/E_{t-1} > 1. \tag{11}$$

Felírjuk a (10) devizaadósság-dinamika forintban kifejezett alakját:

$$E_t D_t^* = eR_t^* E_{t-1} D_{t-1}^* - E_t B_t^*, \qquad t = 1, 2, \dots, T. \tag{12}$$

Ekkor a devizáról a forintra átszámított (hullámos) törlesztőrészlet és adósság rendre

$$\widetilde{B}_t = E_t B_t^*, \quad \text{és} \quad \widetilde{D}_t = E_t D_t^*. \tag{13}$$

Az 1. és a 2. tétel helyére most új tétel lép.

3. tétel. *Ha a bank minden időszakban állandónak veszi a törlesztés devizaértékét, akkor a t-edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forint értéke rendre*

$$B^* = \frac{(R^*-1)D_0^*}{1-R^{*-T}} \quad \text{és} \quad \widetilde{B}_t = E_t B^*, \tag{14}$$

míg a devizaadósság (10)*, s a forintra átszámítva pedig* (13) *szerint alakul.*

Bevezetve az $\widetilde{R} = eR^*$ devizaalapú hitel forint kamattényezőjét, (13) segítségével (12) átírható:

$$\widetilde{D}_t = \widetilde{R}\widetilde{D}_{t-1} - \widetilde{B}_t, \qquad t = 1, 2, \dots, T, \qquad \widetilde{D}_0 = D_0. \tag{15}$$

Hasonlítsuk össze a forintalapú adósság (1) egyenletét a devizaalapú adósság forintban kifejezett (15) egyenletével. Látható, hogy a két kamatláb pontosan akkor azonos, ha

$$R = \widetilde{R}(= R^* e).$$

Ezt az esetet nevezik *fedezetlen kamatparitásnak:* a hazai kamattényező = külső kamattényező × árfolyamváltozás. Bár az eltérő törlesztési folyamat miatt eltérő a két adósságdinamika, a hitel jelenértéke mindkét esetben azonos. Ha emellett a forint hazai értékvesztése párhuzamos a leértékelődéssel: $p = e$, azaz a reálárfolyam állandó, akkor különösen egyszerű az összehasonlítás. Ekkor a devizaalapú hitel azonos a kettős indexálású forinthitellel. A forinthitel hazai törlesztőrészletei reálértékben magasról indulnak, de erősen csökkennek; míg a devizaalapú hitelek alacsonyabb szintről indulnak, de reálértékben állandóak.

A jelenérték segítségével összehasonlíthatjuk a forint és a devizaalapú hitelt is. Emlékeztetőül: $\mathrm{PV} = D_0$. Relatív árfolyammal dolgozva (egységnyinek véve a kezdő árfolyamot), azaz (11)–(13) segítségével

$$\widetilde{\mathrm{PV}} = B^* \left(\frac{e}{R} + \cdots + \frac{e^t}{R^t} \right), \quad \text{ahol} \quad E_0 = 1.$$

Bevezetve a $\rho = R/e$ forint-ekvivalens devizakamattényezőt, (14) segítségével a devizaalapú hitel jelenértéke zárt alakban egyszerűen felírható:

$$\widetilde{\mathrm{PV}} = \frac{R^*-1}{1-R^{*-T}} \frac{1-\rho^{-T}}{\rho-1} D_0,$$

amely pontosan akkor nagyobb vagy kisebb, mint eredeti forinttársa: $\mathrm{PV} = D_0$, ha $\rho > R^*$ vagy $\rho < R^*$.

Harmadszor is megvizsgáljuk a legegyszerűbb esetet.

3. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és devizaalapú hitelt alkalmaz a bank, akkor a t-edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forint értéke rendre

$$B^* = (R^*-1)D_0 \quad \text{és} \quad \widetilde{B}_t = E_t(R^*-1)D_0. \tag{3*}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan deviza törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a devizakamatlábbal egyenlő. Alacsony devizakamatláb esetén komolyabb hitelt is lehetséges törleszteni, feltéve, hogy a leértékelődés az inflációhoz és a nominál jövedelmi pályához képest nem túl gyors.

A *3. táblázat* készítésekor három esetet vizsgálunk: *a*) az árfolyam állandó: $e = 1$, tehát a devizaalapú kamatláb kisebb, mint a forintkamatláb: $eR^* < R$; *b*) a leértékelődés követi az inflációt: $e = p$, és a devizaalapú kamatláb egyenlő a forintkamatlábbal: $eR^* = R$; *c*) a forint leértékelődés gyorsabb, mint az infláció: $e > p$, és a devizaalapú kamatláb nagyobb, mint a forintkamatláb: $eR^* > R$. Az *a*) eset a 2004–2008-as helyzet, a *c*) eset a 2009-től kialakuló helyzet *stilizált* képe, és a *b*) eset a kettő között egy simább átmenet. Számszerűen: $R^* = 1{,}06$; $p = 1{,}06$; $R = R^*p = 1{,}1236$; $e_a = 1$, $e_b = R/R^* = 1{,}06$ és $e_c = 1{,}1$.

A forinthitel kezdőrészlete 1 369 eFt, záró reálértéke csupán 427 eFt (1. táblázat utolsó sora). A devizaalapú hitel kezdőrészlete mindhárom esetben 872 eFt. A kedvező esetben a záró reálérték 272 eFt, a hitel jelenértéke csak 6,4 mFt. A kedvezőtlen esetben a záró reálérték 1 829 eFt, a jelenérték viszont 14,1 mFt. A semleges esetben a törlesztés reálértéke változatlan, és a jelenérték megegyezik a hitellel.

3. táblázat. A devizaalapú hitel és a leértékelődés

Leértékelődési tényező e	Reáltörlesztés (eFt) kezdő $\widetilde{b}_1$	záró $\widetilde{b}_T$	Devizaalapú-hitel jelenértéke (mFt) $\widetilde{\mathrm{PV}}$
1,00	872	272	6,368
1,06	872	872	10,000
1,10	872	1829	14,058

Megjegyzés. $R^* = 1{,}06$, $p = 1{,}06$ és $R = 1{,}1236$; forinthitel törlesztőrészlete: $B = 1\ 369$ eFt, záró reálértéke: $b_T = 427$ eFt.

Közelebb kerülnénk a jelenlegi magyar helyzethez, ha egy időben változó paraméterű devizaalapú hitelt vizsgálnánk: egy nagyon kedvezőnek induló devizaalapú hitel (1. sor) egy hirtelen változás miatt nagyon kedvezőtlenné válik (3. sor). Ennek szemléltetését az Olvasókra bízzuk.

Feladatmegoldások

1. feladat. (3) értelmében

$$B(2T) = \frac{R-1}{1-R^{-2T}}D_0.$$

Jól ismert algebrai azonosság szerint a jobb oldal

$$\frac{R-1}{\left(1-R^{-T}\right)\left(1+R^{-T}\right)}D_0,$$

s ez (3) értelmében

$$\frac{B(T)}{1+R^{-T}}D_0.$$

2. feladat. *a*) Az egyszerűség kedvéért csak $D_1 < D_0$-t igazoljuk. (3) értelmében $B(\infty) < B(T)$, és (1)-et felhasználva

$$D_1 = RD_0 - B(T) < RD_0 - B(\infty) = D_0.$$

b) (9) értelmében a kettős indexálású hitelnél a $B(\infty) < b(T)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(pr-1)D_0 < \frac{(r-1)D_0}{1-r^{-T}}$$

áll. Rendezéssel adódik a 2*b*) feladat feltétele.