I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\log_2 x + \log_4 x = 21$. (*11 pont*)

Megoldás. *a)* A nevezetes szögek szögfüggvényeit felhasználva az egyenlet jobb oldalára írjunk $\cos\frac{5\pi}{6}$-ot:

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}.$$

Tudjuk, hogy ha $\cos\alpha = \cos\beta$, akkor

I. $\alpha - \beta = 2k_1\pi$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$;

II. $\alpha + \beta = 2k_2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Most $\alpha = 3x - \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{5\pi}{6}$. Ezeket felhasználva kapjuk, hogy

(I.) $\quad 3x - \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 2k_1\pi, \qquad 3x = \pi + 2k_1\pi, \qquad x_1 = \frac{\pi}{3} + k_1 \cdot \frac{2\pi}{3}, \qquad$ ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$.

(II.) $\quad 3x - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = 2k_2\pi, \qquad 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi, \qquad x_2 = -\frac{2\pi}{9} + k_2 \cdot \frac{2\pi}{3}, \qquad$ ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az egyenlet gyökei x_1 és x_2.

b) A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$. A 4-es alapról térjünk át 2-es alapra:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}.$$

Ekkor ezt az egyenletet kapjuk:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 21, \quad 2 \cdot \log_2 x + \log_2 x = 42, \quad \log_2 x = 14.$$

A logaritmus definícióját használva: $x = 2^{14} = 16\,384$.

Ez valóban megoldása az egyenletnek, hiszen benne van az értelmezési tartományban, az átalakításaink pedig ekvivalensek voltak.

2. *a) Gábor* 18. *születésnapjára* 18 *vendég volt hivatalos. A vendégek mindegyike pontosan négy vendéget ismert. Az est folyamán minden vendég tombolasorsoláson vett részt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tombolasorsolás két nyertese ismeri egymást?*

b) Hány csúcsa van annak a fagráfnak, amelybe 78 *élt kell berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk?* (*12 pont*)

Megoldás. *a)* A 18 vendéget egy 18 pontú gráffal tudjuk szemléltetni. Két pontot akkor kötünk össze, ha a két pont olyan két vendéget szemléltet, akik ismerik egymást. A feladat szövege szerint ebben a gráfban $\frac{18 \cdot 4}{2} = 36$ él található.

Ha mindenki mindenkit ismerne, akkor ennek a teljes gráfnak

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{1 \cdot 2} = 153$$

éle lenne. A véletlenszerűen kisorsolt két nyertes ennek a teljes gráfnak valamelyik élét határozza meg. Ők csak akkor ismerik egymást, ha az előbb összeszámolt 36 él valamelyikét határozzák meg. A keresett valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes esetek számának a hányadosa adja:

$$p = \frac{36}{153} = \frac{4}{17} \approx 0{,}235.$$

b) Az n pontú fagráfnak $n-1$ éle van, az n pontú teljes gráfnak pedig

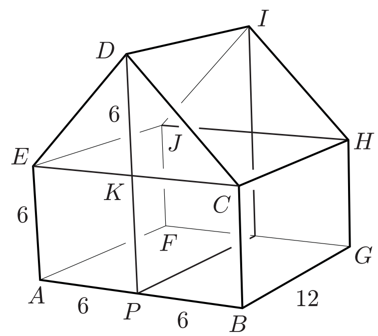
$$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

A feladat szövege szerint felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = (n-1) + 78, \quad n^2 - n = 2n + 154, \quad n^2 - 3n - 154 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet két gyöke: $n_1 = 14$, $n_2 = -11$. A feladat szövegének csak a pozitív gyök tesz eleget. Vagyis a keresett fagráfnak 14 csúcsa van.

3. *A* vázlatrajz *egy házikóra hasonlító ötszögalapú egyenes hasáb vázlatát mutatja. Ezt a szemléltetőeszközt egy* 12 cm *élű bükkfakockából fűrészelték ki. A házikó hossza, szélessége, magassága* 12 cm, *a tető két síkja merőleges egymásra és egybevágó.*



a) Mekkora a test felszíne?

b) Mennyivel lenne könnyebb ez a szemléltetőeszköz, ha lucfenyőből készítették volna?

(*A bükkfa sűrűsége* 0,68 $\frac{g}{cm^3}$, *a lucfenyő sűrűsége* 0,43 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.) (*14 pont*)

Megoldás. A megadott *vázlatrajzra* írjuk rá az ismert és a kikövetkeztethető adatokat. A továbbiakban az ábrán látható jelölést használjuk.

a) A feladat szövege alapján a hasáb alapja olyan ötszög, amely az EC átló és a DP egyenes mentén két 6 cm oldalú négyzetre és két 6 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögre vágható. Vagyis az ötszög területe:

$$T = 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot \frac{6^2}{2} = 108 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A hasáb palástját a 12 cm oldalú $ABGF$ négyzet, a két 12 cm és 6 cm oldalú $BGHC$, illetve $AFJE$ téglalap, valamint a két egybevágó $CHDI$, $EJDI$ téglalap alkotja. Ezeknek a téglalapoknak az egyik oldaluk szintén 12 cm, a másik oldaluk pedig egyenlő a 6 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójával, azaz $6\sqrt{2}$ cm hosszúságúak.

Ezeket felhasználva a palást területe:

$$P = 12 \cdot \left(12 + 6 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 6\right) = 288 + 144\sqrt{2} \approx 491{,}6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A hasáb felszíne:

$$A = 2T + P = 2 \cdot 108 + 491{,}6 = 707{,}6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) A test a $PQID$ és az $ECHJ$ síkok mentén szétdarabolható olyan 12 cm magasságú hasábokra, amelyekből 3 darab 6 cm alapélű 12 cm magasságú négyzetes oszlop illeszthető össze. Vagyis a térfogata a 12 cm élű kocka térfogatának a háromnegyede lesz:

$$V = \frac{3}{4} \cdot 12^3 = 1296 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Vagyis a bükkfából készült kocka tömege $1296 \cdot 0{,}68 = 881{,}28$ gramm. Ha lucfenyőből készült volna, akkor a tömege $1296 \cdot 0{,}43 = 557{,}28$ gramm lenne. Vagyis ekkor 324 grammal lenne könnyebb.

Megjegyzés. Természetesen az *a*) részben kapott $T = 108$ felhasználásával is adódik a hasáb térfogata: $V = 108 \cdot 12 = 1296$ (cm^3).

4. *Két dobókockával* 24*-szer dobtunk. A dobott számok összege a következő gyakorisági táblázatot adta:*

Dobott érték	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gyakoriság	0	1	2	4	5	7	3	1	1	0	0

a) Mutassuk meg, hogy a huszonötödik dobás értéke nem lehet olyan, hogy a dobások értékének számtani közepe, mediánja, módusza valamilyen sorrendben egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő tagja legyen.

b) Az elméletileg számított valószínűségekhez képest melyiket mondhatjuk szélsőségesebbnek, azt hogy 7 *darab* 7*-est, vagy azt, hogy csak* 3 *darab* 8*-ast dobtunk?* (*14 pont*)

Megoldás. Legyen a huszonötödik dobás értéke x. Ekkor a huszonöt szám számtani közepe:

$$\frac{1\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6+7\cdot 7+3\cdot 8+1\cdot 9+1\cdot 10+x}{25}=\frac{153+x}{25}.$$

A gyakorisági táblázat szerint hétszer volt 7-es dobás, a következő gyakoriság pedig az 5. Vagyis a huszonötödik dobástól függetlenül a számsokaság módusza a 7 lesz.

Ha növekedő sorrendben nézzük a számsokaság tagjait, akkor a tizenkettedik helyen 6-os, a tizenharmadik helyen 7-es áll. Ezt látva a mediánra két eset adódik.

Ha a huszonötödik dobás 6-nál nem nagyobb, akkor a medián 6 lesz.

Ha a huszonötödik dobás 7-nél nem kisebb, akkor a medián 7 lesz.

A feladat szövege szerint a módusz és a medián is nem lehet 7, mert a számtani sorozat tagjai nem állandók. Vagyis csak az lehetséges, hogy a medián 6, a módusz pedig 7. Ezekhez a számtani közép értéke háromféle lehetne: 5, $\frac{13}{2}$, 8.

A $\frac{153+x}{25}=5$ egyenlet megoldása: $x=-28$.

A $\frac{153+x}{25}=\frac{13}{2}$ egyenlet megoldása: $x=9{,}5$.

A $\frac{153+x}{25}=8$ egyenlet megoldása: $x=47$.

Egyik esetben sem kaptunk megfelelő egész számot, ezzel a feladat állítását igazoltuk.

b) Két különböző kockával dobunk, az összes esetek száma 36.

A dobott összeg 7 a következő esetekben lesz: $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$, azaz 6 a kedvező esetek száma.

A dobott összeg 8 a következő esetekben lesz: $2+6$, $3+5$, $4+4$, $5+3$, $6+2$, azaz 5 a kedvező esetek száma.

A hetes dobás valószínűsége $\frac{6}{36}$, a relatív gyakorisága pedig $\frac{7}{24}$. Az eltérés:

$$\left|\frac{6}{36}-\frac{7}{24}\right|=\left|\frac{12}{72}-\frac{21}{72}\right|=\frac{1}{8}.$$

A nyolcas dobás valószínűsége $\frac{5}{36}$, a relatív gyakorisága pedig $\frac{3}{24}$. Az eltérés:

$$\left|\frac{5}{36}-\frac{3}{24}\right|=\left|\frac{10}{72}-\frac{9}{72}\right|=\frac{1}{72}.$$

A hetes dobásnál nagyobb az eltérés a relatív gyakoriság és a valószínűség között, mint a nyolcas dobásnál, ezért a 24 dobás során az a szélsőségesebb, hogy hét darab hetest dobtunk.

II. rész

5. *Adott a koordináta-rendszerben az $A(-1;0)$, $B(1;0)$ pontpár, továbbá a C_n nemnegatív koordinátájú pontok, amelyekre $AC_n=BC_n=n$, ahol $n\in\mathbb{N}^+$. Legyen $a_n=C_{n+1}C_n$.*

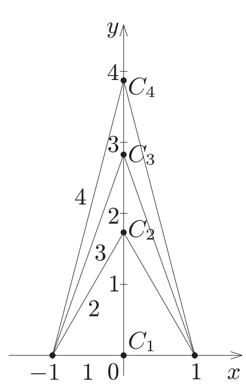
a) *Adjuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első három tagját.*

b) *Igazoljuk, hogy $\{a_n\}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat.*

c) *Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozatnak az 1 alsó korlátja.* (*16 pont*)

Megoldás.

a) A feladat szövege szerint: $a_1=C_2C_1$, $a_2=C_3C_2$, $a_3=C_4C_3$.



Az ABC_2 szabályos háromszög magassága C_2C_1. Mivel a háromszög oldalhossza 2 egység, ezért $a_1 = C_2C_1 = \sqrt{3}$.

Az ABC_3 egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magasságának hosszát Pitagorasz-tétellel meghatározhatjuk: $C_3C_1 = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$. Ekkor

$$a_2 = C_3C_2 = C_3C_1 - C_2C_1 = \sqrt{8} - \sqrt{3}.$$

Az ABC_4 egyenlő szárú háromszögben az előzőhöz hasonlóan járunk el. Kapjuk, hogy $C_4C_1 = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$. Ekkor

$$a_3 = C_4C_3 = C_4C_1 - C_3C_1 = \sqrt{15} - \sqrt{8}.$$

Vagyis: $a_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}732$, $a_2 = \sqrt{8} - \sqrt{3} \approx 1{,}096$, $a_3 = \sqrt{15} - \sqrt{8} \approx 0{,}045$.

b) Az *a*) feladatban alkalmazott módszerrel megadjuk a sorozat a_{n-1} és a_n tagját.

Az ABC_{n-1}, ABC_n, ABC_{n+1} egyenlő szárú háromszögek alaphoz tartozó magasságának hosszát Pitagorasz-tétellel meghatározzuk:

$$\begin{aligned}
C_{n-1}C_1 &= \sqrt{(n-1)^2 - 1^2} = \sqrt{n^2 - 2n},\\
C_nC_1 &= \sqrt{n^2 - 1^2} = \sqrt{n^2 - 1},\\
C_{n+1}C_1 &= \sqrt{(n+1)^2 - 1^2} = \sqrt{n^2 + 2n}.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= C_nC_{n-1} = C_nC_1 - C_{n-1}C_1 = \sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 - 2n},\\
a_n &= C_{n+1}C_n = C_{n+1}C_1 - C_nC_1 = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Meg kell mutatnunk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő, azaz meg kell mutatnunk, hogy minden 1-nél nagyobb pozitív egész n-re:

$$\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 - 2n} > \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1}.$$

A következő átalakítások ekvivalensek az 1-nél nagyobb pozitív egész n-ekre:

$$\begin{aligned}
2\sqrt{n^2 - 1} &> \sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n},\\
4\left(n^2 - 1\right) &> n^2 + 2n + 2\sqrt{n^2 + 2n}\sqrt{n^2 - 2n} + n^2 - 2n,\\
n^2 - 2 &> \sqrt{n^2 + 2n}\sqrt{n^2 - 2n},\\
n^4 - 4n^2 + 4 &> \left(n^2 + 2n\right)\left(n^2 - 2n\right),\\
n^4 - 4n^2 + 4 &> n^4 - 4n^2.
\end{aligned}$$

Ez minden n-re teljesül, ezért az $\{a_n\}$ sorozat valóban szigorúan monoton csökkenő.

c) Meg kell mutatnunk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat minden tagja nagyobb, vagy egyenlő, mint 1.

Nézzük az AC_nC_{n+1} háromszögeket (n tetszőleges pozitív egész). A feladat szövege szerint: $AC_n = n$, $AC_{n+1} = n + 1$, $C_{n+1}C_n = a_n$. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$a_n + n > n + 1, \quad a_n > 1.$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

6. *a*) *A valós számok halmazán értelmezett* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *hozzárendeléssel adott függvényről tudjuk a következőket:*

I. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{53}{12}$.

II. *A* -2 *abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenlete:* $y = 7x + 29$.

Adjuk meg $f(13)$ *értékét.*

b) *Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett* $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ *hozzárendeléssel adott függvénynek három zérushelye van.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Tudjuk, hogy $\displaystyle\int_0^1 \left(x^3 + ax^2 + bx + c\right) dx = \frac{53}{12}$, vagyis:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x^4}{4} + a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^1 &= \frac{53}{12},\\
\frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c &= \frac{53}{12},\\
3 + 4a + 6b + 12c &= 53,\\
2a + 3b + 6c &= 25.
\end{aligned}$$

Az érintő egyenletét ismerve meghatározhatjuk a függvény görbéjén a -2 abszcisszájú pont második koordinátáját: $y = 7 \cdot (-2) + 29 = 15$.

Azaz a $(-2; 15)$ pont illeszkedik a függvény görbéjére. Ezeket a koordinátákat behelyettesítve a hozzárendelési szabályba:

$$\begin{aligned} -8 + 4a - 2b + c &= 15, \\ 4a - 2b + c &= 23. \end{aligned}$$

Az érintő egyenletéből leolvasható, hogy a $(-2; 15)$ pontban húzott érintő meredeksége 7. Az érintő meredekségét deriválással kaphatjuk:

$$\left(x^3 + ax^2 + bx + c\right)' = 3x^2 + 2ax + b.$$

Mivel -2-nél 7 a meredekség, ezért:

$$\begin{aligned} 3(-2)^2 + 2a(-2) + b &= 7, \\ -4a + b &= -5. \end{aligned}$$

Az a, b és c együtthatókra a következő három egyenletből álló, három ismeretlenes egyenletrendszert kaptuk:

$$\left.\begin{aligned} 2a + 3b + 6c &= 25 \\ 4a - 2b + c &= 23 \\ -4a + b &= -5. \end{aligned}\right\}$$

A második egyenlet 6-szorosából kivonva az első egyenletet, a harmadik egyenletet pedig 15-tel szorozva:

$$\left.\begin{aligned} 22a - 15b &= 113 \\ -60a + 15b &= -75. \end{aligned}\right\}$$

Összeadás után: $-38a = 38$, amiből $a = -1$.

Visszahelyettesítéssel: $b = -9$, $c = 9$. Az együtthatók ismeretében:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9.$$

A kérdéses függvényérték: $f(13) = 13^3 - 13^2 - 9 \cdot 13 + 9 = 1920$.

b) Kiemelésekkel szorzattá alakítjuk a függvény hozzárendelési szabályában szereplő harmadfokú kifejezést:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1) = (x-1)\left(x^2 - 9\right).$$

Az $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ nevezetes azonosságot alkalmazva $\left(x^2 - 9\right)$-re:

$$f(x) = (x-1)(x-3)(x+3).$$

Vagyis valóban három zérushelye van a függvénynek: -3, 1, 3.

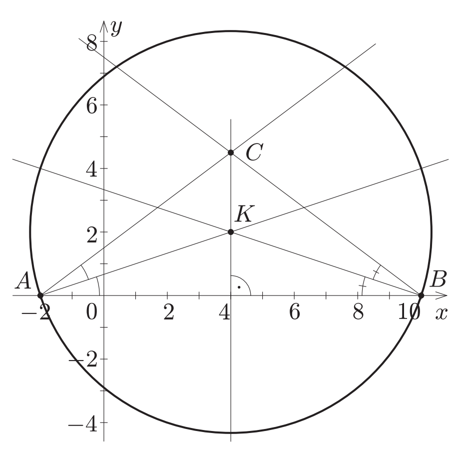
7. *a) A $K(4; 2)$ középpontú, $\sqrt{40}$ sugarú kör és az x tengely két metszéspontja legyen A és B. Az ABC háromszögben $AC = BC$, továbbá az ABC háromszög beírt körének középpontja K. Adjuk meg a C pont koordinátáit.*

b) Az $y = x^2 - 2x - 3$ egyenletű parabola és az x tengely két metszéspontja legyen A és B. Az AB szakasz felezőpontját F-fel, a parabola tengelypontját T-vel jelöljük, a parabolához A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontját pedig C-vel. Mutassuk meg az egy egyenesre illeszkedő F, T, C pontokra, hogy T az FC szakasz felezőpontja. *(16 pont)*

Megoldás.

a) A megadott középponttal és sugárral felírható a kör egyenlete:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 40.$$



Mivel az A és a B pontok illeszkednek az x tengelyre, ezért második koordinátájuk nulla. Ezek a pontok a körre is illeszkednek, ezért a kör egyenletéből $y = 0$ helyettesítéssel megkapjuk a pontok első koordinátáit:

$$(x-4)^2 + (0-2)^2 = 40,$$
$$(x-4)^2 = 36,$$
$$|x-4| = 6.$$

Vagyis: $x_1 = -2$, $x_2 = 10$. Ezek alapján a keresett metszéspontok: $A(-2;0)$, $B(10;0)$.

Mivel ABC egyenlő szárú háromszög és AC, BC a két szára, ezért a C pont az AB szakasz felezőmerőlegesére illeszkedik. Ez az egyenes merőleges az x tengelyre. Az A és B pontok ismeretében megadhatjuk az egyenletét: $x = \dfrac{-2+10}{2} = 4$. Vagyis az erre az egyenesre illeszkedő C pont első koordinátája is 4.

Tudjuk, hogy az ABC háromszög beírt körének középpontja K, ezért a háromszög BAC szögének (az α-nak) AK a szögfelezője.

Az A és a K ismeretében az AK egyenes egyenlete:

$$(y-0)\big(4-(-2)\big) = \big(x-(-2)\big)(2-0), \quad \text{azaz} \quad y = \frac{1}{3}(x+2).$$

Ennek az egyenesnek $\dfrac{1}{3}$ a meredeksége. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{3}$. Ha ennek ismeretében megadnánk a $\operatorname{tg}\alpha$ értékét, akkor felírhatnánk az AC egyenes egyenletét.

Használjuk a függvénytáblázatban is megtalálható $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$ azonosságot. A $2x$ helyére írjunk α-t:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

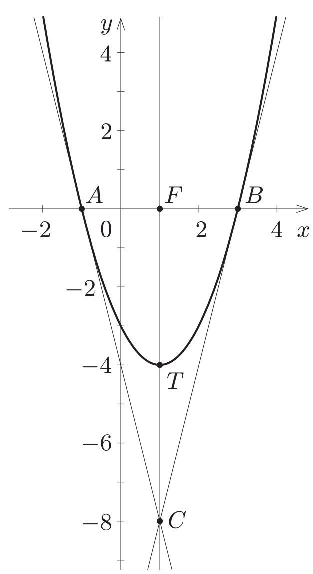
Az A pontra illeszkedő, $\dfrac{3}{4}$ meredekségű egyenes egyenlete: $y = \dfrac{3}{4}(x+2)$. Az erre illeszkedő C pont első koordinátáját már ismerjük, ezért az $x = 4$ behelyettesítésével a második koordinátáját is megkapjuk: $y = \dfrac{3}{4}(4+2) = \dfrac{9}{2}$.

A keresett pont koordinátái: $C\left(4;\dfrac{9}{2}\right)$.

b) Mivel az A és a B pontok illeszkednek az x tengelyre, ezért második koordinátájuk nulla. Ezek a pontok a parabolára is illeszkednek, ezért a parabola egyenletéből az $y = 0$ helyettesítéssel kapott másodfokú egyenlet megoldásai adják a hiányzó koordinátákat. Az

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.



Vagyis a parabola és az x tengely két metszéspontja: $A(-1;0)$, $B(3;0)$, az AB szakasz felezőpontja pedig: $F(1;0)$.

A feladatban szereplő parabola függőleges tengelyű, és ez a tengely illeszkedik az F pontra, vagyis $x = 1$ az egyenlete. A tengely és a parabola metszéspontja adja a tengelypontot, aminek az első koordinátája 1, a másodikat a parabola egyenletéből behelyettesítéssel megkapjuk: $y = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = -4$. A parabola tengelypontja ezek alapján: $T(1;-4)$.

A parabola A-ban és B-ben húzott érintői szimmetrikusak a parabola tengelyére, vagyis az $x=1$ egyenletű egyenesen metszik egymást. Ezért elegendő az egyik érintő egyenletét felírnunk, és azt megnézni, hogy hol metszi a parabola tengelyét.

Írjuk fel a $B(3;0)$ pontban húzott érintő egyenletét. Az érintő iránytangensét (meredekségét) deriválással kapjuk: $\left(x^2-2x-3\right)'=2x-2$. Az $x=3$ abszcisszájú ponthoz tehát $2\cdot 3-2=4$ meredekségű érintő tartozik. A B pont és a meredekség ismeretében az érintő egyenlete: $y=4x-12$. Ennek az érintőnek és a parabola $x=1$ egyenletű tengelyének a metszéspontja: $C(1;-8)$.

Ezzel beláttuk az $F(1;0)$, $T(1;-4)$, $C(1;-8)$ pontokra, hogy T valóban az FC szakasz felezőpontja.

Megjegyzés. A *b*) feladat állítását deriválás nélkül is megmutathatjuk. Az $F(1;0)$ és a $T(1;-4)$ ismeretében már megadható annak a C pontnak a koordinátája, amelyre T az FC szakasz felezőpontja lesz: $C(1;-8)$. Ezek után meg kell mutatnunk, hogy CA és CB egyenesek a parabola érintői. Természetesen a szimmetria miatt ezt elegendő az egyikről belátnunk. A C és a B ismeretében a CB egyenes egyenlete: $y=4x-12$.

Határozzuk meg a parabola és a CB egyenes közös pontjainak számát. Ehhez a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2-2x-3 \\ y=4x-12 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletrendszer egyedüli megoldása: $x=3$, $y=0$.

Mivel az $y=4x-12$ egyenletű egyenes nem merőleges az x tengelyre, ezért érintője a parabolának. Ezzel beláttuk a feladat állítását.

8. *Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre*
a) $\lg x$ *és* $\lg 2x$ *egy derékszögű háromszög befogói,* $\lg 3x$ *pedig az átfogója;*
b) $\sin x$ *és* $\sin 2x$ *egy derékszögű háromszög befogói,* $\sin 3x$ *pedig az átfogója.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A $\lg^2 x+\lg^2 2x=\lg^2 3x$ egyenletet kell megoldanunk. Alakítsuk az egyenletet:

$$\lg^2 x+(\lg 2+\lg x)^2=(\lg 3+\lg x)^2,$$
$$\lg^2 x+\lg^2 2+2\lg 2\lg x+\lg^2 x=\lg^2 3+2\lg 3\lg x+\lg^2 x,$$
$$\lg^2 x+2(\lg 2-\lg 3)\lg x+\lg^2 2-\lg^2 3=0.$$

Az egyenlet $\lg x$-re másodfokú, a megoldóképlettel meghatározzuk a gyököket:

$$\begin{aligned}(\lg x)_{1;2}&=\frac{-2(\lg 2-\lg 3)\pm\sqrt{4(\lg 2-\lg 3)^2-4\left(\lg^2 2-\lg^2 3\right)}}{2}=\\&=-(\lg 2-\lg 3)\pm\sqrt{(\lg 2-\lg 3)^2-\left(\lg^2 2-\lg^2 3\right)}=\\&=\lg\frac{3}{2}\pm\sqrt{\lg^2 2-2\lg 2\lg 3+\lg^2 3-\lg^2 2+\lg^2 3}=\\&=\lg\frac{3}{2}\pm\sqrt{-2\lg 2\lg 3+2\lg^2 3}=\lg\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\lg 3(\lg 3-\lg 2)}=\\&=\lg\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\lg 3\lg\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Számológéppel:

$$(\lg x)_1\approx 0{,}586,\qquad \text{ahonnan}\quad x_1\approx 3{,}85,$$
$$(\lg x)_2\approx -0{,}234,\qquad \text{ahonnan}\quad x_2\approx 0{,}58.$$

A feltételeknek megfelelő legkisebb pozitív szám kerekítve 3,85.

b) A $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$ egyenletet kell megoldanunk.

Ezt az egyenletet $\sin^2 2x=\sin^2 3x-\sin^2 x=(\sin 3x-\sin x)(\sin 3x+\sin x)$ alakra tudjuk hozni. Tovább alakítva:

$$\begin{aligned}\sin^2 2x&=(2\cos 2x\sin x)(2\sin 2x\cos x),\\ \sin^2 2x&=2\sin 2x\cos 2x(2\sin x\cos x),\\ \sin^2 2x&=2\sin^2 2x\cos 2x,\\ 0&=\sin^2 2x(2\cos 2x-1).\end{aligned}$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1=k_1\cdot\dfrac{\pi}{2}$, ahol $k_1\in\mathbb{Z}$; $x_2=\dfrac{\pi}{6}+k_2\pi$, ahol $k_2\in\mathbb{Z}$; $x_3=-\dfrac{\pi}{6}+k_3\pi$, ahol $k_3\in\mathbb{Z}$.

A feltételeknek megfelelő legkisebb pozitív szám a $\dfrac{\pi}{6}$.

9. *A magyar kártyában négy szín található (zöld, makk, tök, piros) és minden színhez nyolc figura tartozik (*VII, VIII, IX, X, *alsó, felső, király, ász). Gyuri, Csaba és István ultiznak. Ezt a kártyajátékot magyar kártyával játsszák. Az osztás során mindenki tíz lapot kap, és két lap marad talonban.*

a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a talonba kerülő két lapon különböző figura lesz.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Gyuri megkapja mind a négy ászt?

c) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Csabánál nem lesz VII*-es lap.*

d) Ha tudjuk, hogy István kapott legalább egy VII*-es lapot az osztáskor, akkor számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy mind a négy* VII*-es hozzá kerül.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Összesen $\binom{32}{2} = \frac{32 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 496$-féleképpen lehet 2 lapot kiválasztani a 32 lapos magyar kártyából. A két különböző figura $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$-féleképpen fordulhat elő, és mindkettőnek 4 színe lehet. Ez $28 \cdot 4 \cdot 4 = 448$ eset. A keresett valószínűség: $\frac{448}{496} \approx 0{,}903$.

b) Gyuri összesen $\binom{32}{10}$-féleképpen kaphatja meg a lapjait. Mivel a kedvező esetben mind a négy ász nála van, ezért a maradék 28 lapból fog kapni még 6 lapot, ami $\binom{28}{6}$-féleképpen történhet. Vagyis a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} \approx 0{,}006.$$

c) Csaba összesen $\binom{32}{10}$-féleképpen kaphatja meg a lapjait. Mivel a most vizsgált (kedvező) esetben nincs nála VII-es, ezért a többi 28 lapból fogja megkapni a tíz lapját, ami $\binom{28}{10}$-féleképpen történhet. Vagyis a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}} \approx 0{,}203.$$

d) A feltételes valószínűség definíciója szerint: $P(B \mid A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$. Jelen esetben B azt az eseményt jelöli, hogy mind a négy VII-es lap Istvánhoz került, A pedig azt, hogy van Istvánnál VII-es.

Tudjuk, hogy $P(BA) = P(B)$, hiszen ha minden VII-es Istvánnál van, akkor van nála VII-es. A négy VII-es $\binom{28}{6}$-féleképpen kerülhet Istvánhoz, ezért

$$P(B) = \frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}.$$

Mivel $\frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}$ annak a valószínűsége, hogy egy megadott játékosnál nincs VII-es lap, ezért

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}.$$

Ezek alapján a keresett valószínűség:

$$P(B \mid A) = \frac{\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}}}{1 - \frac{\binom{28}{10}}{\binom{32}{10}}} \approx 0{,}007.$$