I. rész

1. *a*) Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben az

$$f\colon x \in [-3;13[,\quad x \mapsto -\sqrt{x+3}+5$$

függvényt.

b) Ábrázoljuk az előzővel azonos koordinátarendszerben a

$$g\colon x \in [-3;13[,\quad x \mapsto \big|-|x-3|+3\big|+2$$

függvényt.

c) Vizsgáljuk meg a függvényeket szélsőértékek szempontjából.

d) A függvényábrák segítségével oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $f(x) \geq g(x)$. (*11 pont*)

2. Tekintsük a következő öt állítást:

A: Nem létezik olyan pozitív egészekből álló, öttagú számtani sorozat, amelyre igaz, hogy bármely két elemének a legnagyobb közös osztója 1.

B: Ha egy síkbeli négyszög húrnégyszög, akkor létezik a síkjában egy olyan pont, amelytől a négyszög minden csúcsa azonos távolságra van.

C: Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma n^2.

D: Ha egy e egyenest 2014 db különböző sugarú kör ugyanabban az E pontban érint, akkor e körök középpontjai egy egyenesre illeszkednek.

E: Ha egy függvény periodikus, akkor képe szimmetrikus az y tengelyre.

a) Állapítsuk meg, hogy melyik állítás igaz, és melyik állítás hamis. Indokoljuk válaszainkat.

b) Írjuk fel a B és az E állítások megfordítását, és állapítsuk meg az igazságértéküket.

c) Fogalmazzuk meg egy mondatban a B állítást és a megfordítását. Igaz-e a kapott állítás?

d) Melyik a következő mondatok közül az E állítás tagadása?

I. Ha egy függvény nem periodikus, akkor képe szimmetrikus az y tengelyre.

II. Van olyan periodikus függvény, melynek képe nem szimmetrikus az y tengelyre. (*12 pont*)

3. Egy magashegységben meteorológiai kutatóállomás működik. A tereptárgyak pontos helyét térbeli koordinátarendszerbeli koordinátahármasok segítségével tartják nyilván, melynek egységét minden tengelyen 1 méternek választották, és origójában van a kutatóállomás. A koordinátarendszer x tengelye délről észak felé mutat, y tengelye keletről nyugat felé irányul, z tengelye pedig függőleges, és felfelé irányul. A pontok koordinátáit x, y, z sorrendben adják meg. A környéken három meghatározó hegycsúcs van, melyek koordinátái: $A(8200;21;1214)$; $B(-28;7600;1021)$; $C(-1200;-4550;900)$.

a) Melyik hegy van a kutatóállomástól megközelítőleg északi irányban? Milyen emelkedési szög alatt látja ennek a csúcsát a kutatóállomáson tartózkodó megfigyelő?

b) Mekkora az$A$, B és a C hegycsúcsok tengerszint feletti magassága, ha a $K(5120;-4170;-4752)$ pont éppen a tengerszinten található?

c) A kutatóállomásról havonta helikopter indul. A személyzet feladata az A, B és a C csúcsokon kihelyezett műszerekben az akkumulátorcsere. Mekkora utat tesz meg egy ilyen alkalommal a helikopter, ha a csúcsokat A csúcs, B csúcs, C csúcs sorrendben járja be, majd visszatér a kutatóállomásra? (*14 pont*)

4. *a*) Egy számtani sorozat második eleme $\dfrac{5\sqrt{5}-2}{3}$, differenciája pedig $\sqrt{5}+1$. Mekkora az ötödik tag? Mennyi az első kilenc tag összege?

b) Ha egy számtani sorozat első tagjából levonunk kettőt, második tagjából levonunk egyet, és a harmadik tagjához hozzáadunk ötöt, akkor egy mértani sorozat első három elemét kapjuk. Melyik ez a számtani sorozat, ha tudjuk, hogy a kapott mértani sorozat első két elemének összege egyenlő az eredeti számtani sorozat harmadik tagjával?

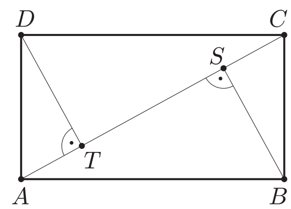
c) Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}.$$

(*14 pont*)

II. rész

5. Az *ábrán* látható téglalap alakú csempéről tudjuk, hogy $DTA\sphericalangle = CSB\sphericalangle = 90°$, valamint $AT = 6$ cm, $TS = 14$ cm.



a) Mekkora egy ilyen csempe területe?

b) Hány db ilyen csempét kell rendelnünk egy 25 m alapkörsugarú, 2,5 m mély, henger alakú medence kicsempézéséhez, ha a vágások és a törések miatt 15%-os ráhagyás szükséges? (A csempéket csomagokban árusítják, de számításaink során ezzel ne foglalkozzunk.)

c) Hány fordulóval képes ezt egy 4 tonna teherbírású teherautó elhozni, ha egy csempe 5 mm vastag, és anyagának sűrűsége $2520\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$?

d) Rendelkezésünkre áll egy olyan szivattyú, amely a 10 cm átmérőjű csövében a vizet $1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel képes áramoltatni. Mennyi idő alatt tudja majd ez a szivattyú a színültig teletöltött medencét kiüríteni? (*16 pont*)

6. *a*) Egy osztályba 16 fiú és 14 leány jár. Egy alkalommal 11 egyforma könyvet sorsolnak ki köztük úgy, hogy egy tanuló csak egy könyvet kaphat. Mennyi a valószínűsége, hogy fiú is és lány is lesz a nyertesek között?

b) Egy középiskolai menzán az ebédhez süteményt lehet választani. Kétféle sütemény van, édes és sós. A tapasztalatok szerint annak valószínűsége, hogy egy diák édes süteményt választ 0,75. Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy egymás után következő diákra nem lesz igaz, hogy azonos típusú süteményt választanak, ha mindegyikük pontosan egy süteményt visz magával?

c) Egy harminc fős alsó tagozatos osztályban van egy ikerpár. A tanító néni egy játékhoz véletlenszerűen két 15 fős csapatba fogja őket sorsolni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ikerpár két tagja nem azonos csapatba kerül? (*16 pont*)

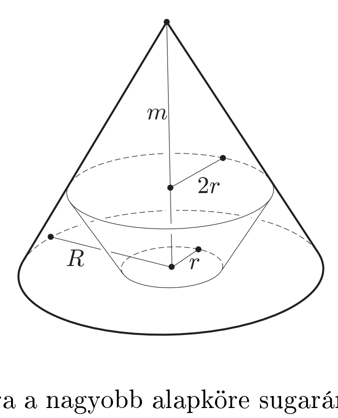
7. *a*) Igazoljuk, hogy a $2^{2n} - 1$ minden pozitív egész n számra osztható hárommal.

b) Igazoljuk, hogy a $\frac{n - n^3}{6}$ kifejezés bármely n egész szám behelyettesítése esetén egész számot ad eredményül.

c) Hány pozitív osztója van a $2014^{11} \cdot 11^{2014}$ számnak?

d) Négyzetszám-e a $3^{2014} - 1$? (*16 pont*)

8. A *képen* látható $R = 30$ cm alapkörsugarú, és $m = 50$ cm magasságú egyenes kúpba egyenes csonkakúpokat írunk a következő feltételekkel:



– A csonkakúp kisebb alapkörének sugara a nagyobb alapköre sugarának felével egyenlő.
– A csonkakúp nagyobb alapkörének körvonala a kúp palástjára illeszkedik.
– A csonkakúp kisebb alapköre a kúp alapsíkjára illeszkedik.

a) Mennyi az ilyen csonkakúpok közül a maximális térfogatú magassága?

b) Mekkora a csonkakúp felszíne és térfogata, ha $r = \frac{R}{3}$? (*16 pont*)

9. *a*) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{\sin^4 x + 2\cos x}{2\cos^4 x + 2} = \sqrt{2}^{(-\sin^2 x - \cos^2 x - 1)}.$$

b) Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\lg\left(\frac{a^2}{3bc}+\frac{b^2}{3ac}+\frac{c^2}{3ab}\right)\geq 0,$$

ahol a, b, c tetszőleges pozitív valós számok. (*16 pont*)