# I. rész

**1.** *Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban* 700 *ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált három lehetőségből. A feleletek aránya* $4:7:14$ *volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya* $6:9:16$ *lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben végül melyik lehetőséget hányan választották?* (*11 pont*)

**Megoldás.** A 700 ember válaszát arányosan elosztva a lehetőségeket először 112, 196, 392 ember választotta. A második esetben az arányszámok összege 31, így gondolhatnánk, hogy a 700-at követő 31-el osztható szám megfelelő lesz. Ez a 713. Ezt arányosan elosztva $138, 207, 368$ jön ki a lehetőségeket választók számára. Ez azonban nem lehetséges, mert a harmadik lehetőséget választók száma csökkenne ez előző esethez képest. Tehát keressük a legkisebb, 392-nél nagyobb 16-al osztható számot. Ez a $400 = 25 \cdot 16$. Így a végső szavazók száma legkevesebb $25 \cdot 31 = 775$. Tehát legkevesebb 75 ember válaszolt utólag és ekkor az adott lehetőségeket 150, 225 és 400 ember választotta.

**2.** *A mosogatógépünkön háromféle program van. Egy mosogatáshoz az* $A$ *program* 30%*-kal több elektromos energiát, viszont* 20%*-kal kevesebb vizet használ, mint a* $B$ *program. A* $B$ *program* 15%*-kal kevesebb elektromos energiát és* 25%*-kal több vizet használ egy mosogatáshoz, mint a* $C$ *program. Mindhárom program futtatásakor* 50 Ft*-ba kerül az alkalmazott mosogatószer. Egy mosogatás az* $A$ *programmal* 165 Ft*-ba, a* $B$ *programmal* 150 Ft*-ba kerül. Mennyibe kerül a* $C$ *programmal egy mosogatás?* (*12 pont*)

**Megoldás.** A $B$ program $x$ Ft értékű elektromos energiát és $y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával: $x + y + 50 = 150$. Az $A$ program $1{,}3x$ Ft értékű elektromos energiát, és $0{,}8y$ Ft értékű vizet használ egy mosogatás alkalmával. A költségre vonatkozó egyenlet: $1{,}3x + 0{,}8y + 50 = 165$.

A következő egyenletrendszert kapjuk $x$-re és $y$-ra:

$$\begin{aligned} x + y &= 100, \\ 1{,}3x + 0{,}8y &= 115. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 70$, $y = 30$.

A feltételek alapján a $C$ program futtatása során az elektromos energia ára: $x/0{,}85 \approx 82$ Ft, a víz ára: $y/1{,}25 = 24$ Ft. A mosogatószer árát is figyelembe véve a $C$ programmal egy mosogatás $82 + 24 + 50 = 156$ Ft-ba kerül.

**3.** *Hányféleképpen húzhatunk ki a* 32 *lapos magyar kártyából* 6 *lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász?* (*14 pont*)

**Megoldás.** *1. eset:* A két ász éppen a piros és a zöld ász. Ekkor még egy piros lapot kell választanunk a maradék 7 piros közül, egy zöldet a maradék 7 zöld közül és 2 lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_1 = \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{14}{2} = 7 \cdot 7 \cdot \frac{14 \cdot 13}{2} = 4459.$$

*2. eset:* Az egyik ász a piros ász, a másik nem a zöld ász. Ekkor kell egy ászt választanunk a másik két ász közül, majd egy piros lapot a maradék 7 piros közül, két zöld lapot a nem ász 7 zöld közül és még egy lapot a nem piros, nem zöld és nem ász 14 lap közül. Az esetek száma:

$$N_2 = 2 \cdot \binom{7}{1} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{14}{1} = 2 \cdot 7 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 14 = 4116.$$

*3. eset:* Az egyik ász a zöld ász, a másik nem a piros ász. $N_3 = N_2 = 4116$.

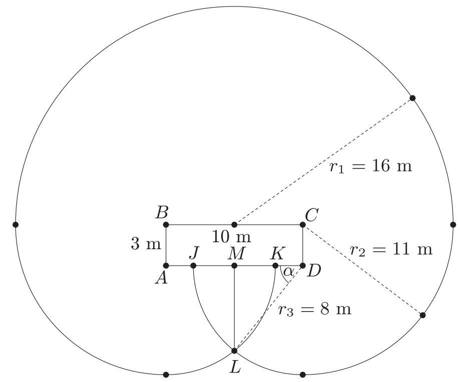
*4. eset:* A makk és a tök ászt választjuk. Ekkor kell még 2 piros lapot választanunk a nem ász 7 piros közül, 2 zöld lapot pedig a nem ász 7 zöld közül. Az esetek száma:

$$N_4 = \binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = 441.$$

Az összes esetek száma: $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 4459 + 2 \cdot 4116 + 441 = 13\,132$.

**4.** *Egy kecske egy kerítéssel védett* $10 \times 3$ *m-es virágágy körüli, elegendően nagy réten legel. A kecskét* 16 m *hosszú kötéllel a kerítés* 10 *méteres oldalának felezőpontjánál levert cölöphöz kötötték. Mekkora területen legelheti le a füvet a kecske? Hányadrészére csökken ez a terület, ha a kötél hosszát* 10 *méterre csökkentik?* (*14 pont*)

**Megoldás.** A 16 méteres kötél esetén a lelegelhető terület egy 16 m sugarú félkörből és két-két 11 és 8 m sugarú negyed körből áll. A virágágyás mögött a 8 m sugarú negyed körök átfedik egymást (*1. ábra*). Ezt a területet duplán számoljuk a fél és negyed körök területének összegzésekor, tehát egyszer le kell vonni. A keletkező $JKL$ idomot egy egyenes szakasz és két körív határolja. Állítsunk merőlegest az $L$ pontból a $JK$ szakaszra. A merőleges szakasz $M$ talppontja a $JK$ szakasz és az $AD$ szakasz felezőpontja lesz. Így két egybevágó fél körszelet jött létre. A fél körszelethez tartozó középponti szögre a $DML$ derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = 5/8$, amiből $\alpha \approx 51{,}32°$. A két fél körszeletből egy egész körszeletet összeállítva a 8 cm sugarú körben, a hozzá tartozó körcikk középponti szöge: $2\alpha \approx 102{,}64°$.




*1. ábra*

A körszelet területe, amit majd le kell vonnunk:

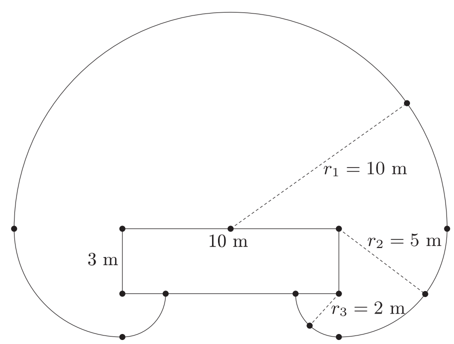
$$T_{\text{szelet}} = T_{\text{cikk}} - T_{\triangle} = \frac{8^2\pi}{360^\circ} \cdot 102{,}64^\circ - \frac{8^2 \sin(102{,}64^\circ)}{2} \approx 57{,}32 - 31{,}22 = 26{,}1 \text{ m}^2,$$

$$T_{16} = \frac{\left(16^2 + 11^2 + 8^2\right) \cdot \pi}{2} - T_{\text{szelet}} \approx 692{,}72 - 26{,}1 = 666{,}62 \text{ m}^2.$$

A megrövidített, 10 m hosszú kötél esetén (*2.ábra*):

$$T_{10} = \frac{\left(10^2 + 5^2 + 2^2\right) \cdot \pi}{2} = 64{,}5\pi \approx 202{,}6 \text{ m}^2,$$

$$\frac{T_{10}}{T_{16}} = \frac{202{,}6 \text{ m}^2}{666{,}62 \text{ m}^2} \approx 0{,}304.$$




*2. ábra*

A lelegelhető terület közel 30%-ára csökken a kötél lerövidítésével.

## II. rész

**5.** *Oldjuk meg az alábbi egyenletet:*

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = 2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x). \qquad (\textit{16 pont})$$

**Megoldás.** $\sin 2x = 2\sin x\cos x \neq 0$ és $\operatorname{tg} x < 0$ esetén átalakítva az egyenlet bal, majd jobb oldalát:

$$\log_4\left(4\sin^2 2x\right) = \frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{\log_2 4} = \frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{2};$$

$$2 - \log_2(-2\operatorname{tg} x) = \log_2 4 - \log_2(-2\operatorname{tg} x) = \log_2\frac{4}{-2\operatorname{tg} x}.$$

Ezután az egyenlet:

$$\frac{\log_2\left(4\sin^2 2x\right)}{2} = \log_2\frac{4}{-2\operatorname{tg} x},$$

amiből

$$\log_2\left(4\sin^2 2x\right) = \log_2\left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x}\right)^2.$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$4\sin^2 2x = \left(\frac{2}{-\operatorname{tg} x}\right)^2,$$

amiből

$$4\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x = \frac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}, \quad \text{és így} \quad 4\sin^4 x\cos^2 x = \cos^2 x.$$

Mivel $\cos x \neq 0$, ezért $4\sin^4 x = 1$, vagyis $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, amiből $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel $\operatorname{tg} x < 0$, ezért a megoldás $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

**6.** *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottó húzáson a 45 számból (visszatevés nélkül) 6-ot kihúzva, a hat lottószámot növekvő sorrendbe rakva egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk?* (*16 pont*)

**Megoldás.** Az összes lehetséges eset száma $C_{45}^6 = \binom{45}{6} = 8\,145\,060$.

Kedvező eset az, ahol a kihúzott számokat növekvő sorrendbe rendezve azok a következő alakúak: $a$, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$, $a+4r$, $a+5r$, ahol $a, r \in \mathbb{N}^+$, $a \leq 40$, $r \leq 8$.

Az $a$ lehetséges értékei $r=1$ esetén $1, 2, \ldots, 40$; $r=2$ esetén $1, 2, \ldots, 35$; $r=3$ esetén $1, 2, \ldots, 30$; $\ldots$; $r=8$ esetén $1, 2, 3, 4, 5$.

Összesítve a kedvező eseteket: $40+35+30+\ldots+5 = \frac{40+5}{2}\cdot 8 = 180$ eset. Tehát a valószínűség:

$$p = \frac{180}{8\,145\,060} \approx 2{,}210\cdot 10^{-5}.$$

**7.** *Milyen görbét ír le az $y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8$ parabola csúcsa, ha az $m$ paraméter értéke végigfut a valós számok halmazán? Az $m$ paraméter mely értékénél lesz a csúcs ordinátája maximális? Adjuk meg ebben az esetben a parabola $P(0;-5)$ ponton átmenő érintőinek egyenletét.* (*16 pont*)

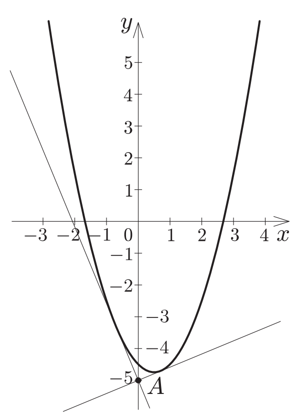
**Megoldás.**

$$y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8 = \big(x-(m-3)\big)^2 - (m-3)^2 + m - 8.$$

A parabola csúcsa $x = m-3$-nál van, ordinátája ekkor $y = -(m-3)^2 + m - 8 = -(m-3)^2 + (m-3) - 5$, vagyis a csúcs az $y = -x^2 + x - 5$ egyenletű parabolán fog mozogni. Az

$$y = -x^2 + x - 5 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{3}{4}$$

függvény maximuma $x = \frac{1}{2}$-nél van, értéke $y = -4\frac{3}{4}$. Tehát a parabola csúcsa $x = m - 3 = \frac{1}{2}$, azaz $m = 3{,}5$ esetén lesz a legmagasabban.




*3. ábra*

Az érintő egyenlete $y = kx - 5$ alakú. A parabola egyenlete $y = x^2 - x - 4{,}5$. Keressük a $k$ paraméter értékeit, ha az egyenes a parabola érintője. Ez akkor lesz, ha az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van.

$$kx - 5 = x^2 - x - 4{,}5, \quad \text{vagyis} \quad x^2 - (1+k)x + 0{,}5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = (1+k)^2 - 2 = 0$, amiből $(1+k)^2 = 2$, vagyis $1 + k = \pm\sqrt{2}$. Így $k_1 = \sqrt{2} - 1$ és $k_2 = -\sqrt{2} - 1$ a két lehetséges érték. Tehát az érintők egyenlete:

$$y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x - 5 \quad \text{és} \quad y = \left(-\sqrt{2} - 1\right)x - 5 \quad (\textit{3. ábra}).$$

**8.** *Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság* 5 km. *Hencidából egy közeli hegy csúcsa* $30°$*-os, Boncidából pedig* $11°$*-os szög alatt látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge* $120°$*-os.*

*a) Milyen magas a hegy?*

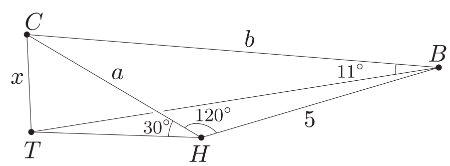
*b) A két várost összekötő szakasz felénél elindítanak egy távirányításos repülőgép modellt, ami végig a szakaszfelező merőleges síkjában mozog. Mennyire közelítheti meg repülés közben a hegy csúcsát?* *(16 pont)*

**Megoldás.** *a)* A *4. ábra* jelöléseit használjuk. Legyen $x$ a hegy magassága. A $CTH$ és $CTB$ derékszögű háromszögekben $\sin 30° = \dfrac{x}{a}$, illetve $\sin 11° = \dfrac{x}{b}$, ebből $a = 2x$ és $b = \dfrac{x}{\sin 11°} \approx 5{,}24x$.

A $CHB$ háromszögben felírhatjuk a koszinusztételt a $b$ oldalra, majd behelyettesítjük az előbb kapott összefüggéseket: $b^2 = a^2 + 5^2 - 2 \cdot a \cdot 5 \cdot \cos 120°$.

$$(5{,}24x)^2 = (2x)^2 + 25 - 2 \cdot 2x \cdot 5 \cdot (-0{,}5), \quad \text{ebből}$$
$$27{,}4576x^2 = 4x^2 + 25 + 10x, \quad \text{bal oldalra rendezve}$$
$$23{,}4576x^2 - 10x - 25 = 0.$$

Az egyenletet megoldva és a magasságra kapott negatív megoldást elvetve: $x = 1{,}2673$. Tehát a hegy magassága (ahhoz a tengerszint feletti magassághoz képest, ahol Hencida és Boncida is fekszik) kb. 1267 m.




*4. ábra*

*b)* Az *5. ábra* jelöléseit használjuk. A legkisebb távolság esetén a repülőgép ($R$) rajta van a $HB$ szakasz $\mathcal{S}$ felező merőleges síkján, a hegy csúcsának magasságában. A keresett távolság $CR$. Ennek a vízszintes szakasznak a vízszintes síkra eső merőleges vetülete $TN$, amely a $TNFH$ derékszögű trapéz hosszabbik alapja lesz. A *4. ábra* szerint

$$TH = \frac{x}{\operatorname{tg} 30°} \approx 2{,}195 \quad \text{és} \quad TB = \frac{x}{\operatorname{tg} 11°} \approx 6{,}520.$$

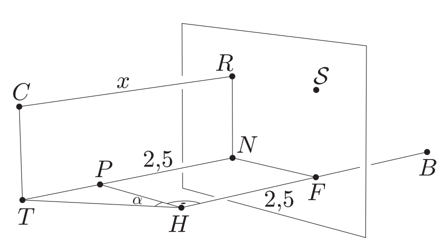
Jelölje a $TN$ szakaszon $P$ azt a pontot, amelyre $PHB\sphericalangle = 90°$, és legyen $\alpha = THP\sphericalangle$. A $THB$ háromszögben a koszinusz tétel alapján

$$6{,}520^2 = 2{,}195^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2{,}195 \cdot \cos(\alpha + 90°),$$

amiből $\cos(\alpha + 90°) \approx -0{,}5782$, azaz $\alpha + 90° \approx 125{,}32°$, vagyis $\alpha \approx 35{,}32°$. A $TPH$ derékszögű háromszögben:

$$TP = TH \cdot \sin\alpha \approx 2{,}195 \cdot 0{,}5777 \approx 1{,}268,$$
$$RC = TN = TP + PN = 1{,}268 + 2{,}5 = 3{,}768.$$

Tehát a repülőgép a hegycsúcsot kb. 3768 méterre közelítheti meg.




*5. ábra*

**9.** *János egy vízzel teli hordó aljára* 4 mm *átmérőjű lyukat fúrt és a kifolyó víz sebességét vizsgálta. A Bernoulli-egyenletből levezette, hogy* $v = \sqrt{2gx}$*, ahol* $x$ *a vízszint pillanatnyi magassága. Megmérte, hogy a teli hordóból az első másodpercben* 62,8 cm$^3$ *víz folyt ki. (A sebességet itt állandónak vehetjük, a rövid mérési idő miatt.) Ezután megállapította, hogy* 5 *perc alatt pontosan* 10 cm*-rel csökkent a vízszint. Feltételezzük, hogy a vízszint exponenciálisan csökken az* $x = h \cdot 2^{-t/T}$ *függvény szerint, ahol* $h$ *a kezdeti vízszint magassága,* $T$ *pedig a hordóban lévő víz „felezési ideje". A hordót üresnek tekinthetjük, ha már csak* 1 cm *magas a vízszint benne. A teli állapotból mennyi idő alatt ürül ki a hordó?* (*16 pont*)

**Megoldás.** A lyuk átmérője $d = 4$ mm, sugara $r = 2$ mm $= 0{,}2$ cm. Keresztmetszete $A = r^2\pi = 0{,}2^2\pi \approx 0{,}1257$ cm$^2$. A $t = 1$ sec alatt kifolyó vízmennyiség $V = Avt$, amiből a sebesség

$$v = \frac{V}{At} = \frac{62,8 \text{ cm}^3}{0{,}1257 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ sec}} \approx 499{,}6 \ \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \approx 5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A $v = \sqrt{2gx}$ képletből kiszámíthatjuk a hordóban lévő víz kezdeti magasságát:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2}{2 \cdot 10} = 1{,}25 \text{ m} = 125 \text{ cm}.$$

A vízszint 5 perc alatt 10 cm-rel csökken, így $t = 300$ sec esetén $x = 115$ cm. Ezeket behelyettesítve a képletbe a felezési idő meghatározható: $115 = 125 \cdot 2^{-300/T}$, amiből

$$T = \frac{-300 \cdot \lg 2}{\lg \frac{115}{125}} = 2494 \text{ sec} \approx 41{,}6 \text{ perc}.$$

$T$ ismeretében kiszámítható az $x = 1$ cm vízmagassághoz tartozó idő, ami a hordó kiürülését jelenti: 1 cm $= 125$ cm $\cdot\, 2^{-t/2494}$, amiből

$$t = \frac{-2494 \cdot \lg \frac{1}{125}}{\lg 2} \approx 17\,373 \text{ sec} = 4 \text{ óra } 49 \text{ perc } 33 \text{ sec}$$

alatt ürül ki a hordó.