

I. rész

1. Hány olyan 4 darab egész számból álló adatsokaság van, melynek mediánja 1, átlaga 2, szórásnégyzete pedig 3? Mi(k) ez(ek) az adatsokaság(ok)? (12 pont)

2. Egy 1 méter oldalhosszúságú, négyzet alakú asztallapra egy téglalap alakú abroszt terítünk. Az abrosz hosszabb oldalai kétszer olyan hosszúak, mint a rövidebbek, és úgy helyezük az asztalra, hogy középvonalai egybeessenek az asztallap átlóival. Így az abrosz mind a négy sarka az asztallap síkjához képest 10 cm-rel lelóg. Az asztallap hány százalékát fedi a terítő ebben a helyzetben? (13 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész $(x; y)$ számpárok halmazán:

$$2x - 2 - \sqrt{8x + 4} = - \left| \frac{3y - 2}{5} \right|. \quad (14 \text{ pont})$$

4. Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját elmetsszük az $x = b$ egyenletű függőleges egyenessel. Az egyenes, $f(x)$, és az x -tengely által bezárt S síkidom területe $t = 18$.

a) Mennyi b pontos értéke?

b) Az S síkidomot megforgatjuk az x -tengely körül. Mekkora a keletkezett forgástest térfogata? (12 pont)

II. rész

5. a) Igazoljuk, hogy az $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenletnek van egyjegyű pozitív egész megoldása.

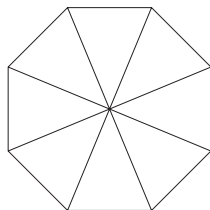
b) Oldjuk meg az $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán.

c) Adjuk meg a tangensra vonatkozó addícióképletek és nevezetes szögek szögfüggvényei segítségével a 105° és a 165° szögek tangenseinek a pontos értékét.

d) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$(\operatorname{tg} x + 2)^2 = 7 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x. \quad (16 \text{ pont})$$

6. Egy szabályos nyolcszögbe az *ábra* szerint a középpontján keresztül nyolc egyforma egyenlő szárú háromszöget rajzolunk be.



a) Mekkora a háromszögek súlypontjai által meghatározott szabályos nyolcszög, illetve az eredeti nyolcszög területének az aránya?

b) Kati az ábrának megfelelő pörgettyűket csinál. A pörgettyűk felső felén lévő nyolc kis háromszög mindegyikét kifesti a piros, fehér, vagy zöld színek valamelyikével (a pörgettyű alját nem festi le).

Hányféle különböző pörgettyűt készíthet Kati, ha az élben szomszédos háromszögek színét különbözőnek szeretné, de nem ragaszkodik ahhoz, hogy mind a három színt felhasználja? (16 pont)

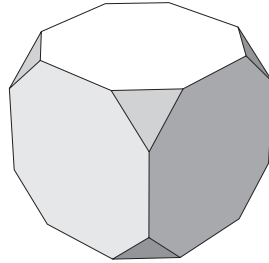
7. a) Adjuk meg a $P(-1; 1)$, és $Q(3; 3)$ pontokon átmenő e egyenes egyenletét.

b) Az $f(x) = x^2 - 6x + 8$ egyenletű függvény grafikonjának melyik az a pontja, amelyikbe húzott érintő merőleges a fenti $e = PQ$ egyenesre?

c) Adjuk meg az e egyenes, az érintő, illetve a két koordináta-tengely által bezárt (az első síknegyedbe eső) konvex négyszög területét. (16 pont)

8. Egy téglatest térfogata 8 cm^3 . Ha a téglatest minden élét 1 centiméterrel megnöveljük, akkor egy 27 cm^3 térfogatú téglatestet kapunk. Mekkora térfogatú téglatestet kapunk, ha ismét megnöveljük az éleket 1-1 centiméterrel? (16 pont)

9. Egy játékgyártó vállalat az *ábrának* megfelelő műanyag játékkockákat gyárt. A gyártás során elkészítik a „sértetlen” 2 cm élhosszú kockákat, majd a nyolc csúcs mindegyikénél az éleken kimérve az azonos d távolságokat levágnak egy-egy olyan tetraédert, melynek alaplapja szabályos háromszög. A levágott tetraéderek anyagát összegyűjtik, és ebből a hulladékanyagból később új játékkockákat gyártanak. (Ezek hulladékát is összegyűjtik. Általában nem kell anyagvesztéssel számolnunk a gyártás során, illetve a hulladékot nem keverik a nem hulladék anyaggal össze.)



a) Mekkora a d távolság pontos értéke, ha pontosan 48 darab játékkocka hulladékából állítható elő egy mind a nyolc csúcsában ép 2 cm élhosszú kocka?

b) A nem hulladékanyagból készült kockák mind első osztályúak a minőség szempontjából, míg a hulladékból készült kockáknak csak 80%-a első osztályú, a többi hibás. A gyártó cég 20 éve változatlan feltételekkel, változatlan gyártósoron gyártja játékeit. A hulladék- és a nem hulladékanyagból készült kockák a gyártás során egy tárolóba kerülnek, ahol összekeverednek. A jubileum alkalmából egy exkluzív 200 darabos játékkocka szettet adnak ki díszdobozba csomagolva. Mekkora az esélye, hogy a dobozba legalább két darab hibás dobókocka kerül? (16 pont)