Jótanács: *Ha egy feladat egy kör és egy egyenes, vagy két kör egy bizonyos metszéspontját kéri, akkor rajzoljuk meg a bizonyítandó állítást a másik metszésponttal is, és vizsgáljuk a kétféle esetet egyszerre, ugyanazon az ábrán.*

Két példát szeretnék mutatni arra, hogy ez az elv hogyan használható versenyfeladatok megoldásában. Mindkét példa a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt. Az elsőt, amit a nemzetközi zsűri közepes nehézségű feladatnak szánt, a közel száz országból válogatott 548 versenyző közül csak 86 tudta megoldani – ennyien kapták meg a maximális 7 pontot –, és további 7 kapott 6-ot vagy 5-öt. (A magyar csapat összesen $1+1$ pontot szerzett.) A másik példa az idei 3. feladat, ezt az 577 versenyő közül 30 oldotta meg kifogástalanul, és még egyvalaki kapott 6 pontot. (A magyarok közül négyen kaptak egy-egy pontot.)

Gondoljuk meg, hogy mi is van a Jótanács mögött. Képzeljük el, hogy egy feladatot, ahol valamilyen geometriai egybeesést (pl. három egyenes egy ponton megy át) kell bizonyítani, koordinátákkal oldunk meg. Először különböző betűket választunk a szabadon megválasztható paraméterek, például a különböző pontok koordinátáinak jelölésére, utána pedig ezekkel a betűkkel kifejezzük a korábbiaktól függő pontok koordináit és a különböző görbék, egyenesek egyenleteiben szereplő együtthatókat. Ha pontosan számolunk, a végén a bizonyítandó állítás egy algebrai azonosság kell, hogy legyen.

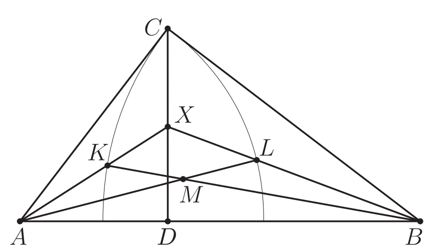
Kör és egyenes, illetve két kör metszéspontjának kiszámításához másodfokú egyenletet kell megoldanunk. Az eredmény egy gyökös kifejezés lesz: a metszéspont koordinátáiban megjelenik egy kellemetlen négyzetgyök (a másodfokú egyenlet két gyökének különbsége), amit azután magunkkal kell cipelnünk. A megoldás végén egy négyzetgyökös azonosságot kell ellenőriznünk. Itt jön a lényeg. Tapasztalhattuk, hogy a négyzetgyökös azonosságok többnyire akkor is igazak maradnak, ha a pozitív négyzetgyök helyett a negatívat vesszük; ezért a legtöbb esetben *a bizonyítandó állítás a másik metszésponttal is igaz.* Az is előfordul, hogy egy feladaton belül több ilyen metszéspontpár is szerepel; ilyenkor a bizonyítandó állításnak még több példányát fedezhetjük fel az ábrában.

A Viète-formulák egyszerű összefüggéseket biztosítanak egy másodfokú egyenlet gyökei között; a geometriai ábránkban ezeknek a metszéspontpárok közötti geometriai kapcsolatok felelnek meg. Úgy is mondhatjuk, hogy a feladat által leírt alakzat csupán része egy nagyobb ábrának, és a nagyobb ábráról, ahol a másik metszéspontot is felvesszük, több geometriai összefüggést olvashatunk le. Természetesen a nagyobb ábra még nem jelenti azt, hogy a megoldás innen kezdve automatikus, de több esélyünk van meglátni a megoldást, mintha az ábrának csak egy kicsi részletében keresgélnénk.

**1. feladat (IMO 2012/5).**

*Legyen az $ABC$ háromszögben $BCA\sphericalangle = 90^\circ$, és legyen $D$ a $C$-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen $X$ a $CD$ szakasz belső pontja. Legyen $K$ az $AX$ szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen $L$ a $BX$ szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen $M$ az $AL$ és $BK$ egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.*

Mit is jelent az a mondat, hogy „*Legyen $K$ az $AX$ szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$*”? Hogy szerkesztenénk meg a $K$ pontot? Egyszerű: az $AX$ szakaszt elmetsszük a $B$ középpontú, $C$-n átmenő $k_B$ körrel. Hasonlóan, az $L$ pont a $BX$ szakasz és az $A$ középppontú, $C$-n átmenő $k_A$ kör metszéspontja.

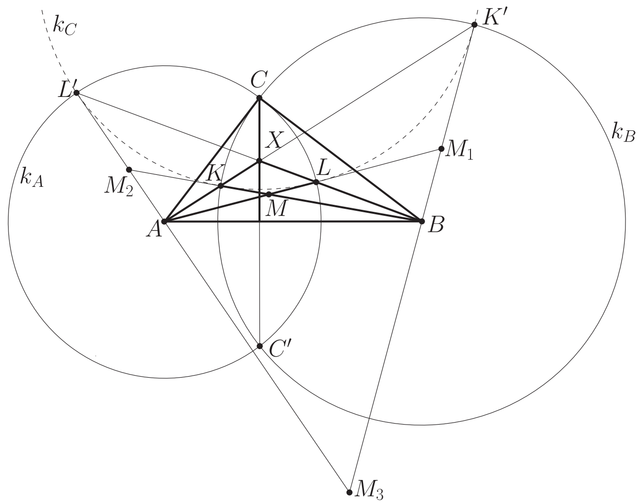



Most keressük elő a tarisznyánkból az otthonról hozott hamuban sült Jótanácsot, és alkalmazzuk. Az $AX$ egyenes két pontban metszi a $k_B$ kört, az egyik a már ismert $K$ pont; a másikat jelöljük $K'$-vel. Hasonlóan, a $BX$ egyenes kétszer metszi a $k_A$ kört; az egyik metszéspont az $L$; a másikat jelölje $L'$. Végül, a $k_A$ és a $k_B$ kör is kétszer metszi egymást; az egyik metszéspont $C$; a másik a $C$ tükörképe az $AB$ egyenesre; legyen ez $C'$.

Az $X$ pontnak a $k_B$ és a $k_A$ körre vonatkozó hatványa

$$XK \cdot XK' = XC \cdot XC' = XL \cdot XL',$$

ebből pedig láthatjuk, hogy a $K, K', L, L'$ pontok egy körön vannak; jelöljük ezt a kört $k_C$-vel.




A megoldás kulcsa az az észrevétel, hogy az $AL$ és $BK$ szakasz érinti a $k_C$ kört. Az $A$ pont a $k_B$ és $k_C$ körök hatványvonalán, az $KK'$ egyenesen van, tehát az $A$ pontnak a $k_B$ és $k_C$ körre vonatkozó hatványa ugyakkora; az $A$ pontból ugyanolyan hosszú érintőket húzhatunk a két körhöz. Az egyik ilyen érintő az $AC$ szakasz, amely merőleges a $k_B$ kör $BC$ sugarára. Ezért az összesen négy érintési pontot a $k_A$ kör metszi ki a $k_B$ és $k_C$ körökből; ez a négy pont a $k_B$ körön $C$ és $C'$, a $k_C$ körön pedig $L$ és $L'$. Az $AL$ és $AL'$ szakaszok tehát érintik $k_C$-t. Hasonlóan láthatjuk, hogy a $BK$ és a $BK'$ szakasz is érinti $k_C$-t.

Végül, az $MK$ és $ML$ szakaszok éppen az $M$ pontból a $k_C$ körhöz húzott érintő szakaszok, tehát egyforma hosszúak.

Ha maradéktalanul végre akarjuk hajtani a Jótanácsot, akkor megrajzoljuk az $AL'$ és $BK'$ egyenesek további metszéspontjait is; az ábrán ezeket jelöli $M_1$, $M_2$ és $M_3$. A bizonyítandó állításnak összesen négy példányát találhatjuk meg az ábrában:

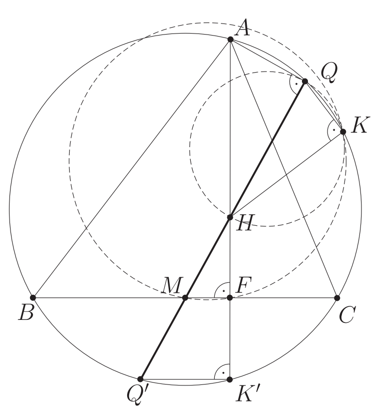
$$MK = ML, \quad M_1K' = M_1L, \quad M_2K = M_2L' \ \text{ és } \ M_3K' = M_3L'.$$

**2. feladat (IMO 2015/3).**[1]

*Legyen $ABC$ egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen $\Gamma$ ezen háromszög körülírt köre, $H$ a magasságpontja és $F$ az $A$-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen $M$ a $BC$ szakasz felezőpontja. Legyen $Q$ $\Gamma$-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90^\circ$, és $K$ $\Gamma$-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90^\circ$. Feltesszük, hogy az $A$, $B$, $C$, $K$, $Q$ pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a $\Gamma$ körön.*

*Bizonyítsuk be, hogy a $KQH$ és $FKM$ háromszögek körülírt körei érintik egymást.*

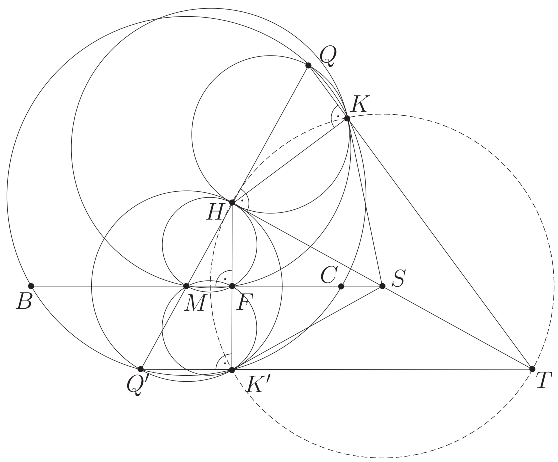
A megoldás első lépése egy egyszerű észrevétel: a $Q$ pont az $MH$ félegyenesen van. Jól ismert, hogy egy háromszög magasságpontjának az oldalegyenesekre, illetve az oldalak felezőpontjaira vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak, utóbbiak a körülírt körön a csúcsokkal átellenes pontok. Legyen $H$ tükörképe a $BC$ egyenesre $K'$, az $M$ pontra $Q'$. (Hogy miért ilyen furcsán jelöljük ezt a két pontot, rövidesen kiderül.) Ekkor tehát $AQ'$ a körnek átmérője. Mivel $AQH\sphericalangle$ derékszög, a Thalész-tétel megfordítása miatt a $QH$ egyenes átmegy a kör $A$-val átellenes pontján, $Q'$-n. Tehát a $HQ$ egyenes tartalmazza a $HQ'$ szakaszt és annak felezőpontját, $M$-et. Ebből láthatjuk, hogy a $Q$, $H$, $M$, $Q'$ pontok, ebben a sorrendben, egy egyenesen vannak.




Innentől kezdve már nem lesz szükségünk az $A$ pontra.

[1] Az idei olimpiai feladatok megoldását a 386–395. oldalakon közöljük.

Most alkalmazzuk a Jótanácsot. A $Q$ pont a körülírt kör és az $MH$ egyenes egyik metszéspontja; a másik metszéspont $Q'$. Mi történne, ha a $Q$ pont helyett a $Q'$ ponttal kellene megoldanunk a feladatot? Először is észrevehetjük, hogy a $K$ pont helyett a $K'$ pontot kell használnunk: ez az a pont a körön, amire $Q'K'H\sphericalangle = 90°$. Mivel $Q'K'H\sphericalangle = 90°$, a $K'Q'H$ kör középpontja az $M$ pont; az $MK'$ szakasz ennek a körnek egy sugara. Hasonlóan, mivel $K'FM\sphericalangle = 90°$, az $FK'M$ körnek $K'M$ egy átmérője. Így a $K'Q'H$ és az $FK'M$ kör középpontja is az $MK'$ egyenesre esik, a két kör a $K'$ pontban érinti egymást. Ha tehát a feladatban a $Q$ pontot kicseréljük a $Q'$ pontra, egy könnyen ellenőrizhető állítást kapunk.




Tekintsük most a háromszög körülírt körét, a $HQK$ kört és $HQ'K'$ kört, valamint ezek páronként vett hatványvonalait. A $HQK$ körben $HQ$, a $HQ'K'$ körben $HQ'$ átmérő és $Q$, $H$, $Q'$ egy egyenesen vannak. Ezért a $HQK$ és a $HQ'K'$ körök érintik egymást. Tehát a három kör páronként vett hatványvonalai a metszéspontokat összekötő $QK$, illetve a $Q'K'$ egyenesek, valamint a $HQK$ és $HQ'K'$ körök belső közös érintője, az $MH$ egyenesre $H$-ban állított merőleges. Ezek egy ponton, a három kör hatványpontján mennek át; jelöljük ezt $T$-vel. A $K$-nál és $K'$-nél levő derékszögek miatt $HK'TK$ húrnégyszög, a köré írt körben $HT$ átmérő. Legyen most $S$ a $HK'TK$ kör középpontja, ami nem más, mint a $HT$ szakasz felezőpontja; ekkor tehát $SH = SK = SK' = ST$. A $HK'$ húr felező merőlegese, a $BMFC$ egyenes is átmegy $S$-en, a kör középpontján.

Az $SH$ szakasz érinti a $HKQ$ és a $HK'Q'$ kört is. Mivel pedig $SH = SK = SK'$, az $SK$ szakasz a $K$ pontban érinti a $HKQ$ kört, az $SK'$ szakasz pedig $K'$-ben érinti a $HK'Q'$ kört. Az $S$ pontnak a $HMF$ körre vonatkozó hatványa $SM \cdot SF = SH^2 = SK^2$; ebből következik, hogy az $FKM$ kör a $K$ pontban érinti az $SK$ szakaszt. Az $SK$ szakaszt tehát az $FKM$ kör és a $HKQ$ kör is érinti a $K$ pontban; a két kör tehát egymást is érinti.