Az $A = x - m$, $B = y - n$ helyettesítéssel az (1) bal oldalán álló kifejezésből $(A^2 + AB + B^2)$-t kapunk. Mivel ebben A^2, B^2 együtthatója egyenlő, alkalmas λ, μ együtthatók mellett $[\lambda(A+B)^2 + \mu(A-B)^2]$ alakra hozható. Az együtthatók összehasonlításából kapjuk, hogy ekkor

$$\lambda + \mu = 1, \quad \lambda - \mu = 1/2,$$

vagyis $\lambda = 3/4$, $\mu = 1/4$. Ezek alapján (1) ekvivalens a

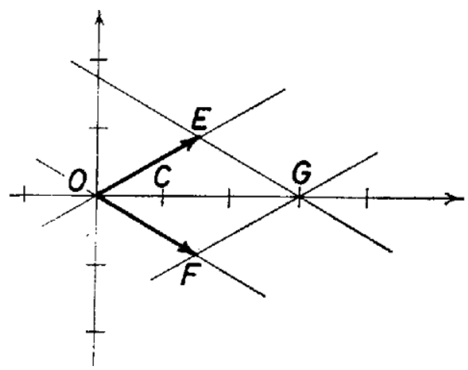
$$\left(3\frac{x+y}{2} - 3\frac{m+n}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\left(3\frac{x-y}{2} - \sqrt{3}\frac{m-n}{2}\right)^2 \leqq 1 \tag{2}$$

egyenlőtlenséggel, a mondott állítás pedig azzal, hogy tetszőleges

$$u = 3\frac{x+y}{2}, \quad v = \sqrt{3}\frac{x-y}{2} \tag{3}$$

valós számpárhoz találhatók olyan m és n egészek, hogy a koordináta–rendszer $P(u;v)$ pontjának a $Q(a;b)$ ponttól mért távolsága legfeljebb 1, ahol

$$a = 3\frac{m+n}{2}, \quad b = \sqrt{3}\frac{m-n}{2}.$$



A koordináta–rendszerben az origóból a Q-ba mutató vektor $(m\mathbf{e} + n\mathbf{f})$ alakú, ahol $\mathbf{e}$ és $\mathbf{f}$ az origóból az

$$E\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad F\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ pontokba mutató vektor.}$$

Könnyen látható, hogy az E, F pontok az O origóval együtt egy szabályos háromszög csúcsait adják, amelynek centruma a $C(1;0)$ pont.

Ha $n = 0$, a különböző m-ekhez tartozó Q pontok az OE egyenesen sorakoznak, ha pedig $m = 0$, Q az OF egyenesen van. Általában pedig Q az $OEGF$ paralelogrammából felépíthető rács valamelyik pontja, ahol G a $(3;0)$ pont. Mivel ez az EF átlója mentén két szabályos háromszögre vágható szét, azt is mondhatjuk, hogy az OEF háromszöggel egybevágó lemezekkel fedjük le a síkot hézagtalanul és átfedés nélkül. A feladat pedig azt kérdezi, hogy a sík tetszőleges pontjában található-e olyan háromszög-csúcs, amelyiktől a pont legfeljebb egységnyi távolságra van. Mivel az O, E, F pontok körüli egységsugarú körök mind átmennek az OEF háromszög C centrumán, ezek együtt lefedik a háromszöget. Így a feladat kérdésére igen a helyes válasz.

Megjegyzések. A megoldás kulcsa a (3) alatti helyettesítés: ez viszi a (2) feltételnek eleget tevő tartományt körbe. Mivel a (3)-hoz hasonló ún. lineáris helyettesítések kört mindig ellipszisbe visznek, ez azt jelenti, hogy az

$$x^2 + xy + y^2 \leqq 1/3 \tag{4}$$

feltételnek eleget tevő pontok egy ellipszis-lemez pontjai. A feladat kérdése azt jelenti, hogy a különböző $(m,\ n)$ centrumokhoz tartozó (4) alatti ellipszisek együtt lefedik-e a síkot. Beláthattuk volna ezt úgy is, hogy először megmutatjuk, hogy az

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right),$$
$$\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right), \quad \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

pontok $m = n = 0$ mellett benne vannak az (1) alatti tartományban, sőt az általuk meghatározott hatszög is e tartomány része, majd belátjuk, hogy ha e hatszög centrumát az $(x; y)$ sík tetszőleges $(m; n)$ pontjába áthelyezzük, a kapott hatszögek együtt lefedik a síkot.

2. Belátható, hogy a

$$c_0x^2 + c_1xy + c_2y^2 \leqq c$$

feltételnek eleget tevő pontok akkor és csak akkor alkotnak egy ellipszislemezt, ha c_0 és c_2 pozitív, valamint $4c_0c_2 > c_1^2$. Az ezzel egybevágó, különböző (m, n) centrumú ellipszisek akkor és csak akkor fedik a síkot, ha még

$$c \geqq \frac{c_0c_2}{4c_0c_2 - c_1^2}(c_0 + c_2 - |c_1|) \tag{5}$$

is teljesül. Így ha a c szám eleget tesz az (5) feltételnek, akkor minden (x, y) valós számpárhoz található olyan m és n egész, amelyikre

$$c_0(x - m)^2 + c_1(x - m)(y - n) + c_2(y - n)^2 \leqq c$$

igaz.