A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

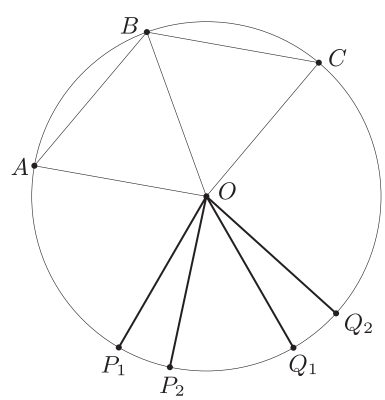
1. *A sík pontjainak egy véges $\mathcal{S}$ halmazát* kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely két különböző A, B pontjához van $\mathcal{S}$-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. $\mathcal{S}$-et* centrum-nélküli*nek nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs $\mathcal{S}$-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.*

(*a*) *Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.*

(*b*) *Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.*

Di Giovanni Márk megoldása. *a*) Ha n páratlan, akkor tekintsünk egy szabályos n-szöget és lássuk be, hogy ez egy kiegyensúlyozott halmaz. Ehhez tekintsünk két tetszőleges, különböző A és B pontot és a távolságukat ívhosszban mérve (a sokszög körülírt köre mentén). Ekkor a két távolság (a hosszabb és rövidebb ív mentén) összege n, azaz páratlan, ezért az egyik távolság páratlan a másik pedig páros. Ha viszont az egyik ív hossza páros, akkor S tartalmazza az ívfelezőpontot, ami ugyanakkora távolságra van A-tól és B-től.

Ha n páros, akkor tekintsünk egy kört és S legyen a következő pontok halmaza: a kör O középpontja és a kör kerületének néhány pontja az *ábra* szerint: A, B, C úgy, hogy $ABCO$ rombusz legyen, továbbá tetszőleges k darab pont $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$, illetve ezen pontok O körüli $60°$-os pozitív iránybeli elforgatottja $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_k)$.



Nyilván megválaszthatjuk a P_i-pontokat úgy, hogy az összes általunk kiválasztott pont különböző legyen. Ekkor S-nek pontosan $2k+4$ darab eleme van (ahol k tetszőleges nemnegatív egész). Tekintsünk most két különböző S-beli pontot. Ha mindkettő a kör kerületén van, akkor a kör középpontja egyenlő távol van tőlük. Ha az egyik a kör középpontja, akkor mivel A B-nek, B C-nek, illetve Q_i P_i-nek a $60°$-os elforgatottja, ezért a szabályos háromszögek miatt azonnal találunk olyan pontot, ami a két kiválasztott ponttól egyenlő távolságra van. Ezzel beláttuk, hogy S kiegyensúlyozott. Továbbá $2k+4$ felveszi az összes 3-nál nagyobb páros számot.

Tehát minden $n \geq 3$ egészre létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

b) Azt állítjuk, hogy pontosan a páratlan n-ekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Ha n páratlan, akkor a szabályos n-szög kiegyensúlyozott halmaz (ezt már korábban beláttuk), továbbá bármely három pontját is választjuk ki, az a pont, amely mindhármuktól egyenlő távolságra van, éppen a körülírt körük középpontja, ami nyilván megegyezik a szabályos n-szög körülírt körének középpontjával. Ez a pont viszont nem S-beli, tehát S centrum-nélküli.

Lássuk most be, hogy páros n-re nem létezik ilyen S halmaz. Legyen $n = 2k$ és tegyük fel indirekt, hogy találtunk ilyen S-et. Ekkor egy tetszőleges A csúcshoz legfeljebb $k-1$ darab S-beli pontpár található úgy, hogy A rajta legyen a felezőmerőlegesükön, mert ha létezne k ilyen pár, akkor a $2k-1$ csúcs közül lenne olyan B pont, amihez tartozó két felezőmerőlegesen is rajta lenne az A pont. Tekintsük ezen felezőmerőlegeseket meghatározó szakaszokat: BC-t és BD-t. Ekkor $AB = AC$ és $AB = AD$-ből $AB = AC = AD$ következik, tehát S-nek van centruma, ami ellentmond eredeti feltevésünknek. Tehát S-nek minden csúcsa legfeljebb $k-1$ darab különböző S-beli pontpár által meghatározott felezőmerőlegesen lehet rajta. Viszont összesen $\binom{2k}{2} = k(2k-1)$ darab pontpár van, amelyek mindegyikéhez tartozik egy felezőmerőleges, továbbá minden pontpár által meghatározott felezőmerőlegesen van legalább egy darab S-beli pont.

Tehát $k(2k-1) \leq 2k(k-1)$, azaz $k \geq 2k$, ami nyilvánvalóan ellentmondás. Így páros n-re nincsen kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

Összefoglalva: pontosan a páratlan n-ekre létezik kiegyensúlyozott, centrum-nélküli S halmaz.

2. *Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a,b,c) számhármasokat, amelyekre az*

$$ab-c, \quad bc-a, \quad ca-b$$

számok mindegyike 2-hatvány.

(2-hatvány egy 2^n alakú egész szám, ahol n egy nemnegatív egész szám.)

Szabó Barnabás megoldása. A szokásos módon $v_2(x)$ jelöli egy x pozitív egész prímfelbontásában a 2 hatványkitevőjét. A továbbiakban hivatkozás nélkül fel fogjuk használni azt az ismert állítást, mely szerint $v_2(x) > v_2(y)$ esetén $v_2(x \pm y) = v_2(y)$, és $v_2(x) = v_2(y) = t$ esetén $v_2(x \pm y) \geq t+1$. Ha $a = 1$, akkor $ab-c$ és $ac-b$ közül az egyik nem pozitív, így nem lehet 2-hatvány. Tehát $a \neq 1$, hasonlóan $b, c \neq 1$.

1. eset: minden változó páros. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v_2(a) \geq v_2(b) \geq v_2(c) \geq 1$. Ekkor $v_2(ab-c) = v_2(c)$, de $ab-c$ 2-hatvány, így $ab-c \leq c$, azaz $ab \leq 2c$. A $v_2(ac-b) = v_2(b)$ egyenlőségből kapjuk, hogy $ac \leq 2b$. A két egyenlőtlenséget összeszorozva nyerjük, hogy $a \leq 2$, de $a \neq 1$, így $a = 2$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $2b \leq 2c$ és $2c \leq 2b$, azaz $b = c$, viszont ekkor $v_2(bc-a) = v_2(b^2-2) = 1$, tehát $b^2-2 = 2^1$ lesz, ahonnan $b = c = 2$. Az első eset tehát az $(a,b,c) = (2,2,2)$ számhármast adja, ami valóban megfelelő.

2. eset: egyik változó páratlan. Feltehető, hogy c lesz páratlan. Tegyük fel, hogy $v_2(a) \neq v_2(b)$, mondjuk $v_2(a) > v_2(b)$. Ekkor a páros, tehát $ab-c$ páratlan, azaz $ab-c = 1$. Másrészt, $v_2(bc-a) = v_2(b)$, így $bc-a = 2^{v_2(b)}$ osztója b-nek, $bc-a \leq b$. Ekkor $ab-1 = c \leq \dfrac{b+a}{b} \leq 1+a$, ahonnan $a(b-1) \leq 2$, így $a = 2$ és $b = 2$, ami ellentmond $v_2(a) > v_2(b)$-nek.

Tehát $t = v_2(a) = v_2(b)$. Először tegyük fel, hogy $t \geq 1$. Ekkor $2|ab$, így $ab-c = 1$. A c-t behelyettesítve

$$bc-a = ab^2-(a+b) = 2^x,$$
$$ca-b = a^2b-(a+b) = 2^y,$$

ahol feltehető, hogy $x \leq y$. A kettőt kivonva, $2^x(2^{y-x}-1) = ab(a-b)$ adódik. Hogyha $x = y$, akkor $a = b$ lesz, és $a^3-2a = a\left(a^2-2\right) = 2^x$. Mivel a páros, $v_2(a^2-2) = 1$, így $a^2-2 = 2^1$, $a = 2$ adódik. Ebből kapjuk a $(3,2,2)$ számhármast.

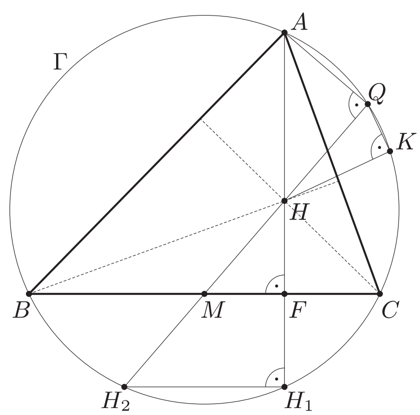
Ha $x < y$, akkor $2^x(2^{y-x}-1) = ab(a-b)$ miatt $v_2\left(ab(a-b)\right) = x$, de $v_2(a-b) \geq t+1$, így $x \geq 3t+1$. Ebből $v_2\left(ab^2-(a+b)\right) = x \geq 3t+1$, de $v_2\left(ab^2\right) = 3t$ miatt $v_2(a+b) = 3t$. Másrészt $3t > t+1$ miatt $v_2(a-b) = v_2\left(2a-(a+b)\right) = t+1$, azaz $x = v_2\left(ab(a-b)\right) = 3t+1$. Legyen $ab^2 = 2^{3t}d$ és $a+b = 2^{3t}e$, ekkor az egyenletbe helyettesítve és 2^{3t}-vel osztva $d-e = 2$, tehát $\dfrac{d}{e} \leq 3$, ezért $ab^2 \leq 3(a+b)$. Ebből $b \geq 2$ miatt $a \leq \dfrac{3}{b^2}a + \dfrac{3}{b} \leq \dfrac{3}{4}a + \dfrac{3}{2}$, ahonnan $a \leq 6$. Ha $a = 2$, akkor $2b^2 \leq 6+3b$, innen $b = 2$ (hiszen $v_2(b) = 1$), innen ismét kapjuk a $(3,2,2)$ számhármast. Hasonló vizsgálattal adódik, hogy $a = 4$ esetén nincs megoldás, míg $a = 6$ esetén kapjuk a $(2,6,11)$ hármast.

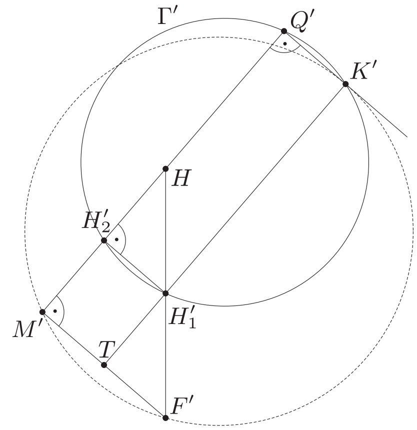
Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $t = 0$, azaz mindhárom szám páratlan. Legyen $bc-a = 2^x$, $ca-b = 2^y$, $ab-c = 2^z$. Feltehető, hogy $x \leq y \leq z$. Ekkor $2^y \mid (ab-c)-(ac-b) = (b-c)(a+1)$ és $2^y \mid (ab-c)+(ac-b) = (b+c)(a-1)$. Nyilván $v_2(b-c) = 1$ vagy $v_2(b+c) = 1$, innen $a \geq 2^{y-1}-1$. Viszont $(a+b)(c-1) = 2^x+2^y \leq 2^{y+1}$, de $a+b \geq 2^{y-1}$, tehát $c \leq 5$. $c = 5$ esetén $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát csak $c = 3$ lehetséges. Mivel $b > 1$, így $a < 2^y-1$ tehát $a = 2^{y-1}+1$ vagy $a = 2^{y-1}-1$. Az előbbi esetből egyszerű számolás után ellentmondásra jutunk, míg az utóbbiból a $(3,5,7)$ megoldást kapjuk, ami valóban jó. A megoldások tehát: $(2,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,6,11)$ és $(3,5,7)$ és persze ezek permutációi.

3. *Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90^\circ$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90^\circ$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.*

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Janzer Barnabás megoldása. Legyen a H pont tükörképe a BC egyenesre (vagyis az F pontra) H_1, az M pontra H_2. Ismert, hogy H_1 és H_2 a Γ körön vannak, továbbá H_2 az A-val átellenes pont. A Thalész-tétel megfordításából a QH egyenes Γ-t az A-val átellenes pontban, vagyis H_2-ben metszi. Ezért HQ és HM is átmegy H_2-n, vagyis H_2, M, H és Q egy egyenesen vannak. Az A, H és H_1 pontok egy egyenesen vannak, ezért a Thalész-tételből $H_2H_1H\sphericalangle = 90^\circ$. Az A, B, C pontokra a továbbiakban nincs szükségünk a megoldás során.





Invertáljunk H középponttal. Ekkor M', H_2', H, Q' ilyen sorrendben egy egyenesen vannak. HQ Thalész-köre (melyen K rajta van) egy $M'Q'$-re merőleges egyenesbe megy át (hiszen középpontja rajta van a H_2MHQ egyenesen). Hasonlóan HM és HH_2 Thalész-körének képe is egy $M'Q'$-re merőleges egyenes, előbbi körön F, utóbbin H_1 rajta van. Továbbá H_2' és H_1' rendre a HM' és HF' szakasz felezőpontja. Γ' egy kör, mely áthalad a Q', H_2', H_1', K' pontokon.

$Q'H_2'H_1'K'$ négyszög derékszögű trapéz és húrnégyszög egyben, ezért téglalap. Messe $K'H_1'$ egyenes $M'F'$-t a T pontban. $M'F'H$-ban $H_1'T$ középvonal, mivel H_1' felezőpont és $H_1'T$ párhuzamos HM'-vel. Ezért $TH_1'K'$ egyenes szakaszfelező merőlegese az $M'F'$ szakasznak, így a szimmetria miatt $M'F'K'$ körülírt köre érinti (az $M'F'$-vel párhuzamos) $Q'K'$ egyenest. Így őskepeik is érintik egymást, ami pont a bizonyítandó állítás.

4. *Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja O. Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.*

Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

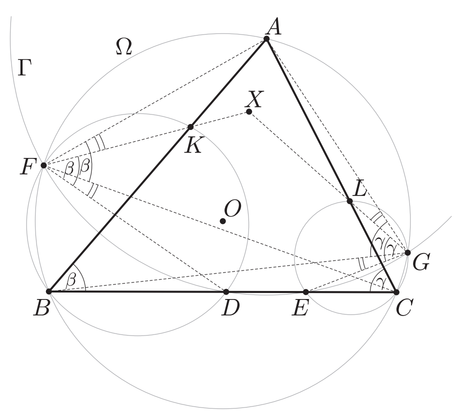
Baran Zsuzsanna megoldása. Először belátom, hogy $BGE\sphericalangle = DFC\sphericalangle$.

$BCF\sphericalangle(= DCF\sphericalangle) = BGF\sphericalangle$, mert Ω körnek azonos ívén nyugvó kerületi szögek.

Az FCD háromszögben $DFC\sphericalangle + DCF\sphericalangle + FDC\sphericalangle = 180°$.

Mivel $FDEG$ húrnégyszög, az is igaz, hogy $FDE\sphericalangle + FGE\sphericalangle = FDE\sphericalangle + BGF\sphericalangle + BGE\sphericalangle = 180°$.

Ezek szerint $DFC\sphericalangle = 180° - DCF\sphericalangle - FDC\sphericalangle = 180° - BGF\sphericalangle - FDE\sphericalangle = BGE\sphericalangle$.



A kerületi szögek tétele miatt az is igaz, hogy

$$\begin{aligned}
DFK\sphericalangle &= DBK\sphericalangle \ (BDK \text{ kör } DK \text{ ívén nyugszanak}) = \\
&= CBA\sphericalangle = CFA\sphericalangle \ (\Omega\ AC \text{ ívén nyugszanak}),\\
EGL\sphericalangle &= ECL\sphericalangle \ (CEL \text{ kör } EL \text{ ívén nyugszanak}) = \\
&= BCA\sphericalangle = BGA\sphericalangle \ (\Omega\ AB \text{ ívén nyugszanak}).\\
AFK\sphericalangle &= AFD\sphericalangle - DFK\sphericalangle = AFD\sphericalangle - CFA\sphericalangle = DFC\sphericalangle = \\
&= BGE\sphericalangle = AGE\sphericalangle - BGA\sphericalangle = AGE\sphericalangle - EGL\sphericalangle = AGL\sphericalangle.
\end{aligned}$$

Ezek szerint $AFX\sphericalangle = AFK\sphericalangle = AGL\sphericalangle = AGX\sphericalangle$.

Az AFG háromszög egyenlőszárú (AF és AG egyaránt Γ sugarai), ezért $AFG\sphericalangle = AGF\sphericalangle$ és A illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére.

$OF = OG$ (Ω sugarai), ezért O is illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére. Így az AO egyenes az FG szakasz felezőmerőlegese.

$$XFG\sphericalangle = |AFG\sphericalangle - AFX\sphericalangle| = |AGF\sphericalangle - AGX\sphericalangle| = XGF\sphericalangle.$$

Ezek szerint az XFG háromszög egyenlőszárú, így az X pont illeszkedik az FG szakasz felezőmerőlegesére, azaz az AO egyenesre. Ezt akartuk belátni.

Mivel a feladatban megadták, hogy a pontok milyen sorrendben helyezkednek el a BC szakaszon, illetve az Ω körön, diszkusszióra nincs szükség.

5. *Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül*

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x) \tag{1}$$

minden x, y valós számra.

Williams Kada megoldása. Mindenekelőtt keressük meg (1) lineáris megoldásait, vagyis az $f(x) = ax + b$ alakúakat! Beírva (1)-be, majd kibontva és átrendezve:

$$a\,(x + a(x+y) + b) + b + axy + b = x + a(x+y) + b + y(ax+b),$$
$$\big(a^2 - 1\big)\,x + \big(a^2 - a - b\big)\,y + (ab + b) = 0. \tag{$*$}$$

Meggondolható, hogy ez éppen akkor állhat fenn minden x, y-ra, hogyha $(*)$-ban mindhárom együttható nulla, ami csak akkor lehet igaz, ha $(a,b) = (1,0)$ vagy $(-1,2)$, azaz $f(x) = x$ vagy $f(x) = 2 - x$. Ennek a meggondolása nem tartozik a megoldáshoz, viszont ebből sejthető meg, hogy ez a kettő lesz (1)-nek az összes megoldása. Jól látható, hogy ezeknél $(*)$ együtthatói tényleg mind nullák lesznek, vagyis hogy $f(x) = x$ és $f(x) = 2 - x$ valóban megoldása (1)-nek.

Helyettesítsünk $x = 0$-t, majd pedig $y = 1$-et (1)-be, nyerjük:

$$f\,(f(y)) + f(0) = f(y) + yf(0), \tag{2}$$
$$f\,(x + f(x+1)) = x + f(x+1). \tag{3}$$

Kezdésképpen könnyű megtalálni $f(0)$ lehetséges értékeit: írjunk (2)-be előbb $y = 0$-t: $f\,(f(0)) = 0$ adódik, amiért (2)-be most $y = f(0)$-t helyettesítve

$$f\,(f\,(f(0))) + f(0) = f\,(f(0)) + f(0)^2,$$

azaz $2f(0) = f(0)^2$ adódik, ahonnan $f(0) = 2$ vagy $f(0) = 0$.

1. eset: $f(0) = 2$, itt az $f(x) = 2 - x$ megoldást várjuk.

Ez az eset egy trükkös észrevétellel elintézhető. Figyeljük meg ugyanis, hogy (3) szerint $x + f(x+1)$ minden x-re fixpontja f-nek. Ellenben a megcélzott $x \mapsto 2 - x$ függvénynek csak az 1 a fixpontja. Ha belátnánk, hogy $f(0) = 2$ esetén f-nek csak az 1 lehet fixpontja, abból következne, hogy $x + f(x+1)$ fixpont lévén minden x-re, azonosan 1 kell legyen, vagyis $f(x+1) = 1 - x$ minden x-re, azaz $f(t) = 2 - t$ bármely t-re $(t := x + 1)$.

Belátjuk tehát, hogy $f(0) = 2$-re $f(a) = a$-ból $a = 1$ következik. Ehhez (2)-t vegyük szemügyre, $y = a$-t helyettesítve: $f\,(f(a)) + 2 = f(a) + 2a$, $a = 1$ adódik. Ez igazolja, hogy $f(0) = 2$ esetén $f(x) = 2 - x$.

2. eset: $f(0) = 0$, itt az $f(x) = x$ megoldást várjuk.

Ezúttal bonyolultabban járunk el: azt vesszük észre, hogy ha (1)-be x, y helyett $-x$, $-y$-t helyettesítünk, azzal $f(xy)$ ugyanúgy jelen marad, és ezért kiejthetjük:

$$f(xy) = -f\,(x + f(x+y)) + (x + f(x+y)) + yf(x)$$
$$f(xy) = -f\,(-x + f(-x-y)) + (-x + f(-x-y)) - yf(-x).$$

Itt gyakran üti fel fejét $x + y$ és ellentettje, kényelmesebb az $y := k - x$ jelölést használni:

$$\begin{aligned} &-f\,(x + f(k)) + (x + f(k)) + (k-x)f(x) = \\ &= -f\,(-x + f(-k)) + (-x + f(-k)) - (k-x)f(-x). \end{aligned} \tag{4}$$

A megoldáshoz először meghatározunk néhány $f(\pm k)$ értéket, majd pedig az adódó összefüggéseket összehasonlítjuk, amiből már némi munka árán kifejezhetjük $f(x)$-et.

Már tudjuk, hogy $f(0) = 0$, írjunk hát (4)-be $k = 0$-t, rögtön barátságosabb lesz:

$$-f(x) + x - xf(x) = -f(-x) - x + xf(-x),$$
$$2x = (x+1)f(x) + (x-1)f(-x). \tag{5}$$

Ha (3)-ba $x=-1$-et írunk, akkor $f(0)=0$ miatt $f(-1)=-1$ nyerhető, illetve (5)-be $x=1$-et írva, megkapjuk, hogy $2=2f(1)$, $f(1)=1$. Vagyis (4)-be már írhatunk $k=1$-et is:

$$-f(x+1)+(x+1)+(1-x)f(x)=-f(-x-1)-(x+1)-(1-x)f(-x).$$

Itt viszont (5) szerint $-(1-x)f(-x)$ helyére $2x-(x+1)f(x)$ írható, vagyis

$$\begin{gathered}-f(x+1)+2(x+1)=(x-1)f(x)-f(-x-1)+2x-(x+1)f(x),\\ 2+2f(x)=f(x+1)-f(-x-1).\end{gathered}$$

Ha ezt x helyett $x-1$-re írjuk fel, akkor

$$2+2f(x-1)=f(x)-f(-x) \tag{6}$$

adódik.

Beszorozva (6)-ot $(x-1)$-gyel, majd hozzáadva (5)-öt:

$$2(x-1)+2(x-1)f(x-1)+2x=(x-1)f(x)+(x+1)f(x),$$
$$(x-1)f(x-1)+(2x-1)=xf(x). \tag{7}$$

Ezután (6)-ba $x=-1$-et írva, $f(-2)=-2$, majd pedig (6)-ba $x=2$-t írva, $f(2)=2$ nyerhető.

A befejezéshez írjunk (4)-be $k=2$-t:

$$-f(x+2)+(x+2)+(2-x)f(x)=-f(-x-2)+(-x-2)-(2-x)f(-x),$$

ahol $f(x+2)-f(-x-2)=2+2f(x+1)$ érvényes (6) szerint, így

$$2(x+2)+(2-x)\cdot(f(x)+f(-x))=2+2f(x+1).$$

Beszorozva $(x+1)$-gyel, (7) miatt adódik:

$$\begin{gathered}2(x+2)(x+1)-(x-2)(x+1)\cdot(f(x)+f(-x))=2(x+1)+2\left(xf(x)+2x+1\right),\\ 2(x^2+3x+2)-2(x+1)-2(2x+1)=(x^2-x-2)\left(f(x)+f(-x)\right)+2xf(x),\\ 2x^2=(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)f(-x).\end{gathered}$$

Ezt pedig $(x-1)$-gyel tovább szorozva és (5)-öt használva:

$$\begin{gathered}2x^2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)\left(2x-(x+1)f(x)\right),\\ 2x^2(x-1)-2x(x^2-x-2)=\left[(x-1)(x^2+x-2)-(x+1)(x^2-x-2)\right]f(x),\\ 2x\left(x^2-x-(x^2-x-2)\right)=\\ =\left[x\left((x^2+x-2)-(x^2-x-2)\right)-\left((x^2+x-2)+(x^2-x-2)\right)\right]f(x),\\ 4x=\left[x\cdot(2x)-(2x^2-4)\right]f(x),\end{gathered}$$

amiből már világos, hogy $f(x)=x$, bármely x-re.

Tehát két megoldásunk van: $f(x)=x$ és $f(x)=2-x$, és ezeket már leellenőriztük.

6. *Egész számok egy $a_1,a_2,\dots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:*
(i) $1\le a_j\le 2015$ minden $j\ge 1$-re;
(ii) $k+a_k\ne \ell+a_\ell$ minden $1\le k<\ell$-re.
Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N, hogy

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right|\le 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n>m\ge N$.

Fehér Zsombor megoldása. Legyen $c_j=a_j+j$. Ekkor az (i) feltétel azt mondja ki, hogy $j+1\le c_j\le j+2015$, a (ii) feltétel pedig azt, hogy a c_j számok mind különbözőek.

Megmutatjuk, hogy a $c_1,c_2,\dots$ sorozat véges sok kivétellel minden pozitív egész számot felvesz. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 2016-ot nem vesz fel, és legyen t egy olyan pozitív egész, ami nagyobb ennél a 2016 számnál. Ekkor az (i) feltétel alapján a $\{c_1,c_2,\dots,c_t\}$ halmaz minden eleme az $[1,t+2015]$ intervallumba esik, és mivel (ii) szerint t különböző elemről van szó, ezért ebből az intervallumból $\{c_1,c_2,\dots,c_t\}$ éppen 2015 pozitív egész számot nem vesz fel. Azonban feltevésünk szerint az ennél bővebb $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz legalább 2016 darab t-nél kisebb pozitív egész számot nem vesz fel, ami pedig ellentmondás.

A feladatnak megfelelő b számot válasszuk meg annyinak, amennyi a $c_1, c_2, \dots$ sorozat által fel nem vett pozitív egészek száma, N pedig legyen egy olyan szám, ami nagyobb ennél a b darab kimaradó számnál. A fenti gondolatmenetből az is látható, hogy $b \le 2015$. Az m, n pozitív egészekre a továbbiakban feltesszük, hogy $N \le m < n$.

A feladatunk lényegében az, hogy egy $\sum a_j$ kifejezést megfelelő korlátok közé szorítsunk, ami nyilván ugyanaz, mint $\sum c_j$ megfelelő korlátok közé szorítása. Tudjuk, hogy $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ minden eleme az $[m+2, n+2015]$ intervallumba esik, és mivel ezen intervallum $n-m+2014$ egész számából $n-m$ van az előző halmazban, ezért 2014 egész szám marad ki. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt a 2014 számot: ki fog derülni, hogy közülük $b-1$ darab az $[m+2, n+2015]$ intervallum „elején", $2015-b$ pedig a „végén" helyezkedik el.

Mivel a $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz b darab egész számot nem vesz fel az $[1, \infty)$ intervallumból, ezért a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b+m$ számot nem vesz fel $[1, \infty)$-ből. Ez $c_j > j$ alapján azt jelenti, hogy a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b-1$ számot nem vesz fel $[m+2, \infty)$-ből. Mivel azonban $m+2 > N$, ezért ezen $b-1$ számot is felveszi valahol a $c_1, c_2, \dots$ sorozat, csak még c_{m+1} előtt. Így ez a $b-1$ szám mindegyike olyan c_k, melyre $k \le m$, így $c_k \le k + 2015 \le m + 2015$ alapján ezek a számok mind az $[m+2, m+2015]$ intervallumba esnek.

Tehát azon 2014 egész közül, melyek az $[m+2, n+2015]$ intervallumban benne vannak, de a $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ halmazban nem, $b-1$ darab az $\{c_1, \dots, c_m\}$ halmazban van, a maradék $2015-b$ darab pedig szükségképpen a $\{c_{n+1}, \dots\}$ halmazban. Ezen $2015-b$ szám mindegyike legalább $n+2$, így ezek az $[n+2, n+2015]$ intervallumba esnek.

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra, és vegyük észre, hogy a feladat megoldásával lényegében készen vagyunk. Csak az alapján, hogy a 2014 kimaradó szám valahol az $[m+2, n+2015]$ intervallumban van, még nem tudnánk pontos becslést mondani, hiszen m, n-et kicsivel megváltoztatva az egyik kimaradó szám szabadon „átugorhatna" az intervallum elejéről a végére, ezzel nagy ($n-m$ nagyságrendű) változást eredményezve. De azáltal, hogy a 2014 kimaradó szám közül mindig $b-1$ van az intervallum elején, és $2015-b$ a végén (ahol a b egy univerzális paramétere a sorozatnak!), ilyen ugrások nem történhetnek meg, csak az intervallum szélein lévő rövid (2014 hosszú) intervallumok belsejében mozoghatnak a kimaradó számok. Így lehetséges az, hogy m, n-től független, 1007^2 nagyságrendű becslést fogunk tudni mondani.

Nem maradt más hátra, minthogy kiszámoljuk a 2014 kimaradó szám összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét, majd ezt visszavezessük a feladatbeli összegre. Tudjuk, hogy a 2014 szám felbontható valahogy egy $b-1$ és egy $2015-b$ elemű csoportra, melyek elemei rendre az $[m+2, m+2015]$, illetve az $[n+2, n+2015]$ intervallumból valók. (Előfordulhat, hogy ez a két intervallum átfedi egymást, de ez nem okoz gondot.) Mivel a számok különbözőek, ezért a 2014 szám összege legalább

$$\begin{gathered}((m+2)+(m+3)+\dots+(m+b))+\\+((n+2)+(n+3)+\dots+(n+2016-b))=\\=\frac{(b-1)(2m+b+2)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2018-b)}{2}=h_{\min},\end{gathered}$$

legfeljebb pedig

$$\begin{gathered}((m+2017-b)+\dots+(m+2015))+((n+b+1)+\dots+(n+2015))=\\=\frac{(b-1)(2m+4032-b)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2016+b)}{2}=h_{\max}.\end{gathered}$$

Ha H jelöli az előbbi 2014 kimaradó szám összegét, akkor a feladatban szereplő összeg így írható:

$$\begin{gathered}\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)=\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-j-b)=\sum_{i=m+2}^{n+2015}i-H-\sum_{j=m+1}^{n}j-\sum_{j=m+1}^{n}b=\\=\frac{(n+2014-m)(n+m+2017)}{2}-H-\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}-b(n-m).\end{gathered}$$

A $h_{\min} \le H \le h_{\max}$ becslést alkalmazva, a kifejezések egyszerűsítése után végül a következőt kapjuk:

$$b^2-2016b+2015 \le \sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b) \le -b^2+2016b-2015.$$

Így tehát valóban,

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \le -b^2+2016b-2015=1007^2-(b-1008)^2 \le 1007^2.$$