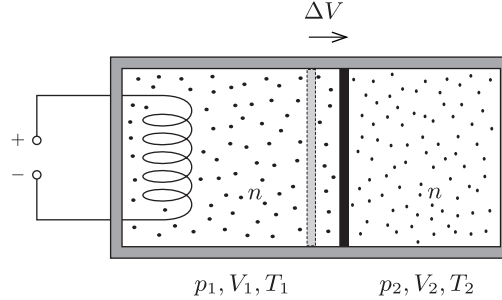


### 1. feladat.

**1.A.** Ez a részfeladat megegyezik a jelen számunkban kitűzött **P. 4767.** feladattal, emiatt a megoldását később közöljük (– a szerk.).

**1.B.** Jelöljük a gázok kezdeti állapotjelzőit  $p_0$ -al,  $V_0$ -al és  $T_0$ -al, mólszámukat pedig  $n$ -nel (ezek a bal és a jobb oldali rekeszre ugyanakkorák), egy kicsiny hő közlése után kialakuló állapotot pedig jellemezzük az *1. ábrán* látható mennyiségekkel.



1. ábra

A dugattyú egyensúlya miatt  $p_1 = p_2$ , az össztérfogat állandósága miatt pedig

$$V_1 = V_0 + \Delta V, \quad V_2 = V_0 - \Delta V$$

írható. A jobb oldali rekeszben lévő gáz nem vett fel hőt, állapotváltozása adiabatikus, így fennáll

$$p_0 V_0^\kappa = p_2 (V_0 - \Delta V)^\kappa, \quad \left( \text{héliumra } \kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} \right),$$

ebből ( $\Delta V \ll V_0$  esetén)

$$(1) \quad p_2 = p_0 \left( \frac{1}{1 - \frac{\Delta V}{V_0}} \right)^\kappa \approx p_0 \left( 1 + \kappa \frac{\Delta V}{V_0} \right)$$

következik. A bal oldali rekeszben lévő gázra a hőtan I. főtétele szerint

$$Cn\Delta T = \frac{f}{2}nR\Delta T + p_2\Delta V,$$

ahol  $C$  a mólhőt jelöli. Az (1) összefüggés felhasználásával és a  $(\Delta V)^2$ -tel arányos (másodrendűen kicsiny) tagokat elhagyva

$$(2) \quad C = \frac{f}{2}R + p_0 \frac{\Delta V}{n\Delta T}$$

adódik. Az ideális gázok állapotegyenletéből

$$nR\Delta T = p_0\Delta V + V_0\Delta p,$$

ahonnan (1)-et felhasználva

$$nR\Delta T = (1 + \kappa)p_0\Delta V,$$

tehát

$$\frac{\Delta V}{n\Delta T} = \frac{R}{p_0} \frac{1}{1 + \kappa}$$

következik. Ezt (2)-be helyettesítve (tudván, hogy héliumra  $f = 3$ ) megkapjuk a keresett mólhőt:

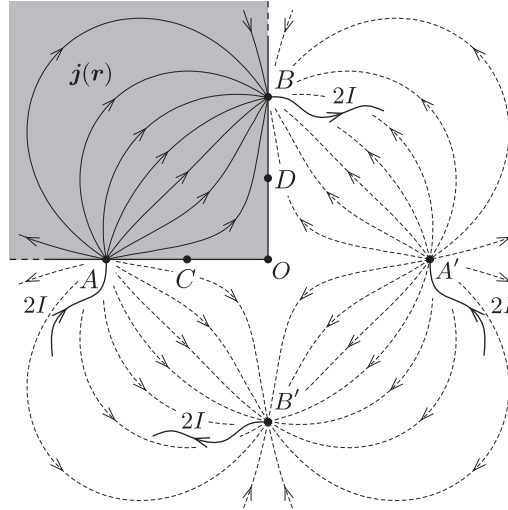
$$C = \frac{f}{2}R + \frac{1}{1 + \kappa}R = \frac{f^2 + 2f}{2(f + 1)}R = \frac{15}{8}R.$$

**1.C.** A cél a voltmérő által jelzett  $U$  feszültség és a lemezbe vezetett  $I$  áramerősség közötti összefüggés megállapítása. Ha ismernénk a kialakuló kétdimenziós árameloszlás (helyfüggő)  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  áramsűrűségét, akkor az  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{j}(\mathbf{r})$

<sup>1</sup>A feladatok szövegét múlt havi számunkban közöltük.

differentiális Ohm-törvényből meghatározhatnánk az elektromos térerősséget a lemez belsejében. A térerősségből a  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültséget integrálással már ki tudnánk számítani. Ez matematikailag nehéz feladat, de szerencsére van egy sokkal könnyebb út.

A fémlemez éleinél a  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  áramsűrűség-vektor élre merőleges komponensének el kell tűnnie. Ez a szokatlan határfeltétel könnyen kezelhető, ha az elektrosztatikában használt tükörtlítés-módszerhez hasonló gondolatmenetet követünk (lásd a 2. ábrát). Ehhez tükrözzük az  $A$  és  $B$  pontokat a lemez  $BD$  és  $AC$  oldaléleire; az így kapott pontokat jelölje  $A'$  és  $B'$ . A véges lemezbeli árameloszlás éppen olyan, amilyen egy végtelen kiterjedésű fémlemez egyik negyedében alakulna ki, ha abba az  $A$  és  $A'$  pontokban egyaránt  $2I$  erősségű áramot vezetnénk be, a  $B$  és  $B'$  pontokból pedig  $2I$  áramot vezetnénk el.



2. ábra

Ha csak egyetlen elektródán keresztül vezetnénk  $2I$  áramot a végtelen fémlemezbe, akkor az áramsűrűség nagysága

$$j(r) = \frac{2I}{2\pi r\delta}$$

lenne a bevezetési ponttól  $r$  távolságra. A lemezbeli térerősség ugyanitt

$$E(r) = \frac{\rho I}{\pi r\delta}$$

értékű, a potenciál pedig (egy önkényesen választható,  $r_0$  távolságra lévő ponthoz képest)

$$\Phi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{r_0}{r}.$$

A  $C$  pont potenciálját a valódi és a „tükörelétródák” hatásainak szuperpozíciójaként számolhatjuk. Ha a potenciált a négyzet  $O$  csúcsában választjuk nullának (ez a pont valamennyi áram be- és kivezetési pontjától  $r_0 = 2d$  távol van), a kérdéses potenciál tehát

$$\Phi_C = \frac{\rho I}{\pi\delta} \left( \ln \frac{2d}{d} + \ln \frac{2d}{3d} - \ln \frac{2d}{\sqrt{5}d} - \ln \frac{2d}{\sqrt{5}d} \right),$$

egyszerűsítések után:

$$\Phi_C = \frac{\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{5}{3}.$$

Hasonlóan számolhatjuk a  $D$  pont potenciálját is, és könnyen látszik, hogy  $\Phi_D = -\Phi_C$ . A  $C$  és  $D$  pontok közötti feszültség tehát  $2\Phi_C$ , ennyit jelez tehát a véges kiterjedésű lemezre kapcsolt voltmérő is:

$$U = \frac{2\rho I}{\pi\delta} \ln \frac{5}{3}.$$

Ebből a lemez  $\rho$  fajlagos ellenállása kifejezhető:

$$\rho = \frac{\pi\delta}{2 \ln(5/3)} \frac{U}{I}.$$

Érdekes, hogy az eredmény nem függ  $d$ -től (egészen addig, amíg  $d$  sokkal kisebb a négyzetlap oldaléleinél, és sokkal nagyobb  $\delta$ -nál.)

## 2. feladat. Furfangos szökőkút

2.1. A „bemerülő” rész térfogata:

$$V = \left( \frac{2\theta_{\max}}{2\pi} R^2 \pi - 2 \sin \theta_{\max} R \cdot \cos \theta_{\max} R \cdot \frac{1}{2} \right) L = \frac{R^2 L}{2} (2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max}).$$

A keresett hányados:

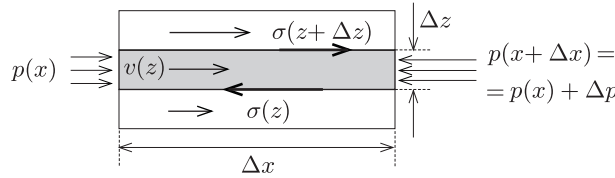
$$\frac{F_{\text{fel}}}{mg} = \frac{\rho_{\text{víz}} \frac{R^2 L}{2} (2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max}) g}{\rho R^2 \pi L g} = \frac{\rho_{\text{víz}}}{\rho} \frac{1}{2\pi} (2\theta_{\max} - \sin 2\theta_{\max}) = 0,010.$$

A felhajtóerő tehát a gránithengerre ható nehézségi erőnek mindössze csak 1%-a.

2.2. Tekintsünk három, egymás feletti folyadékréteget (3. ábra). A középső,  $\Delta z$  vastagságú,  $\ell'$  szélességű és  $\Delta x$  hosszúságú réteg nem gyorsul, a rá ható erők tehát egyensúlyban vannak:  $[\sigma(z) - \sigma(z + \Delta z)] \Delta x \ell' = [p(x) - p(x + \Delta x)] \Delta z \ell'$ , ebből valóban

$$\frac{\sigma(z + \Delta z) - \sigma(z)}{\Delta z} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} = \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

következik.



3. ábra

2.3. Mivel  $\frac{\Delta \sigma}{\Delta z} = -K$ , így  $\sigma(z) = \sigma_0 - Kz$ . Másrészt a nyírófeszültség definíciója szerint

$$\sigma(z) = \eta \frac{dv}{dz}, \quad \text{ezért} \quad v(z) = \frac{\sigma_0}{\eta} z - \frac{K}{2\eta} z^2 + C.$$

A folyadék sebessége a határokon ( $z = 0$ -nál és  $z = h$ -nál) zérus, tehát

$$v(z) = \frac{Kh}{2\eta} z - \frac{K}{2\eta} z^2 \equiv \frac{K}{2\eta} z(h - z).$$

Ezek szerint a kért együtthatók:

$$A = -\frac{K}{2\eta}, \quad B = \frac{Kh}{2\eta}, \quad C = 0.$$

2.4. A nyomás  $\theta$  függvényében a  $\frac{\Delta p}{\Delta x} = -K$  feltételből határozható meg (4. ábra):

$$p(\theta) = p_A - KR\theta.$$

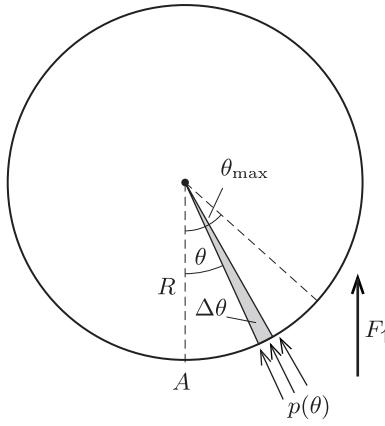
Mivel  $p(\theta_{\max}) = p_0$ , így  $p_A = p_0 + KR\theta_{\max}$ , vagyis

$$p(\theta) = p_0 + KR(\theta_{\max} - \theta).$$

A hengerpalást egy kicsiny,  $\Delta\theta$  szöggel jellemezhető darabkájára ható nyomásból származó erő függőleges komponense:

$$\Delta F_{\uparrow} = LR\Delta\theta(p(\theta) - p_0) \cos \theta,$$

hiszen a hengerre mindenhol ható  $p_0$  légnyomás járuléka nyilván kiesik.



4. ábra

Az eredő függőleges irányú erő (a feladatok szövegének végén szereplő matematikai segítség felhasználásával)

$$F_{\uparrow} = 2R^2 KL \int_0^{\theta_{\max}} (\theta - \theta_{\max}) \cos \theta \, d\theta = 2R^2 KL(1 - \cos \theta_{\max}).$$

Ennek az erőnek kell egyensúlyt tartania a gránithenger  $R^2 \pi L \rho g$  súlyával:

$$2R^2 KL(1 - \cos \theta_{\max}) = R^2 \pi L \rho g,$$

ahonnan megkapjuk az eddig ismeretlen  $K$  állandót:

$$K = \frac{\pi \rho g}{2(1 - \cos \theta_{\max})},$$

valamint a beáramlási pontban a túlnyomást:

$$p_A - p_0 = \frac{\pi \rho g R \theta_{\max}}{2(1 - \cos \theta_{\max})}.$$

*Megjegyzés.* A hengerre nemcsak a nyomásból, hanem az áramló folyadékban ébredő nyírófeszültségekből származó erő is hat. A  $v(z)$  sebességeloszlás ismeretében  $\sigma(z)$  is könnyen kiszámítható. Belátható, hogy a nyíróerők járuléka a függőleges irányú erőhöz  $h/R$ -szer kisebb, mint a nyomásból adódó járulék, tehát az előbbi valóban elhanyagolható.

**2.5.** A vályú alján található nyíláson beáramló víz „hozamát” az áramlási sebességprofilból tudjuk meghatározni:

$$Q_{\text{be}} = 2 \int_0^h v(z) L \, dz = 2 \int_0^h \frac{K}{2\eta} z(h-z) L \, dz = \frac{KLh^3}{6\eta} = \frac{\pi \rho g L h^3}{12\eta(1 - \cos \theta_{\max})}.$$

**2.6.** A  $v(0, \omega) = 0$  és  $v(h, \omega) = R\omega$  határfeltételekből következik, hogy  $D = R\omega/h$ , vagyis az áramlási sebességprofil:

$$v(z, \omega) = \frac{Kh}{2\eta} z - \frac{K}{2\eta} z^2 \pm \frac{R\omega}{h} z.$$

**2.7.** Amíg a henger nem forog, a jobb és a bal oldalhoz tartozó nyírófeszültségek forgatónyomatéka kiegyenlíti egymást. A forgáskor ez az egyensúly felborul. A sebességprofilnak csak az új,  $\pm \frac{R\omega}{h} z$  tagjából származó járulékot kell vizsgálnunk. A nyírófeszültségekben ennek megfelelő járulék:

$$\sigma'(z) = \eta \frac{d}{dz} \left( \frac{R\omega}{h} z \right) = \eta \frac{R\omega}{h}.$$

Ez a (helytől független, de a szögsebességgel arányos) nyírófeszültség mindkét oldalon fékezi a forgást, a forgatónyomatéka

$$M = \sigma'(z) \cdot LR \cdot 2\theta_{\max} \cdot R = \frac{2\eta LR^3 \theta_{\max}}{h} \omega.$$

Az  $m = R^2 \pi L \rho$  tömegű,  $\Theta = \frac{1}{2} m R^2$  tehetetlenségi nyomatékú henger forgásegyenlete:

$$-M = \Theta \frac{d\omega}{dt},$$

ami a fentebb kiszámított mennyiségek behelyettesítése után így írható:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{4\eta\theta_{\max}}{\varrho\pi hR} \omega(t) \equiv -\lambda\omega(t).$$

Ez a (differenciál)egyenlet a radioaktív bomlások egyenletével analóg, így a megoldása a bomlástörvény ismert alakja:

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\lambda t} \equiv \omega_0 e^{-\frac{4\eta\theta_{\max}}{\varrho\pi hR} t}.$$

### 3. feladat: Fehér törpék keletkezése

#### 3.1. A csillag tömegsűrűsége

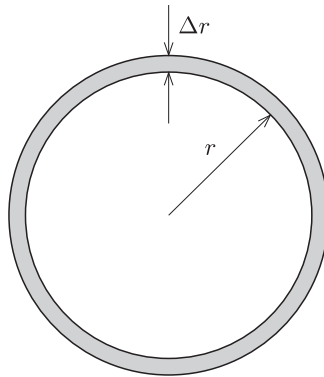
$$\varrho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}.$$

„Rakjuk össze” (gondolatban) a csillagot vékony gömbhéjakból (5. ábra)! Amikor a csillag éppen  $r$  sugarú, a következő,  $\Delta r$  vastagságú gömbhéj darabkájának a „végtelenből” történő ideszállításakor

$$\Delta W = -\gamma \frac{\varrho \frac{4\pi r^3}{3}}{r} \cdot \varrho 4\pi r^2 \Delta r$$

munkát végzünk. A teljes energia ezen munkák összege:

$$E_{\text{grav}} = \sum \Delta W = -\gamma \varrho^2 \frac{16\pi^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \cdot \gamma \frac{M^2}{R}.$$

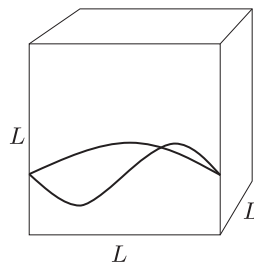


5. ábra

*Megjegyzés.* A gravitáció és az elektrosztatika egyenletei közötti hasonlóság felismerésével, majd az  $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$  energiasűrűség integrálásával ugyanerre az eredményre juthatunk.

**3.2.** Az elektron lehetséges hullámhosszaira (a kocka mindhárom oldalával párhuzamos irányban) a következő feltétel teljesül (6. ábra):

$$n \frac{\lambda}{2} = L \quad (\text{ahol } n \text{ pozitív egész}).$$



6. ábra

A hullámhossz és az impulzus közötti kapcsolatot a de Broglie-féle  $\lambda = h/p$  összefüggés adja meg. Az elektron lehetséges impulzuskomponensei tehát

$$p_x = \pm \frac{n_x h}{2L}; \quad p_y = \pm \frac{n_y h}{2L}; \quad p_z = \pm \frac{n_z h}{2L},$$

ahol  $n_x, n_y$  és  $n_z$  pozitív egészek.

**3.3.** Az elektron energiája

$$E = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

így alapállapotban az összes elektron egy

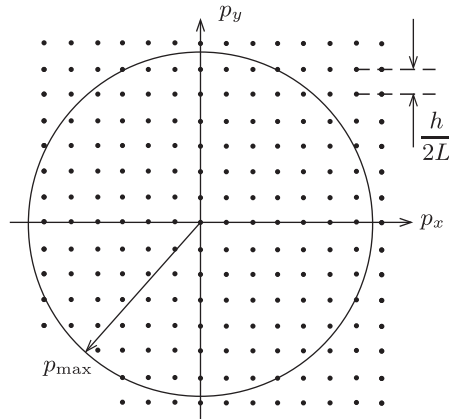
$$p_{\max} = \sqrt{2m_e E_{\max}}$$

sugarú gömbön belül helyezkedik el a  $\mathbf{p}$  vektor komponensei által „kifeszített” ún. impulzustérben (lásd a 7. ábrát, amelyen az áttekinthetőség kedvéért csak két dimenzióban ábrázoltuk az elektronállapotokat). Egy-egy elektronállapot  $\left(\frac{h}{2L}\right)^3$  térfogatot foglal el az impulzustérben, így az elektronállapotok száma (jó közelítéssel)

$$N = 2 \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi p_{\max}^3}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3}.$$

(A jobb oldalon a 2-es faktor a Pauli-elv miatt jelent meg.) Ebből  $p_{\max}$  értéke

$$p_{\max} = \frac{h}{4L} \left(\frac{3}{\pi} N\right)^{1/3}.$$



7. ábra

**3.4.** Az impulzustérben a  $p$  sugarú,  $\Delta p$  vastagságú gömbhéjban lévő elektronállapotok száma:

$$\Delta N = 2 \frac{4\pi p^2}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3} \Delta p.$$

(A 2-es faktor a jobb oldalon ismét a Pauli-elv miatt szerepel.) Ebben a héjban mindegyik elektron energiája  $\frac{p^2}{(2m_e)}$ , ezért a héj összes energiája

$$\Delta E = \frac{8\pi p^2}{\left(\frac{h}{2L}\right)^3} \Delta p \cdot \frac{p^2}{(2m_e)} = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e} p^4 \Delta p.$$

A teljes elektronrendszer energiája tehát

$$E_N = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e} \int_0^{p_{\max}} p^4 dp = \frac{32\pi L^3}{h^3 m_e} \cdot \frac{p_{\max}^5}{5} = \frac{32\pi}{5} \left(\frac{3}{64\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{h^2}{m_e} \cdot N^{5/3} \cdot L^{-2}.$$

Leolvashatjuk, hogy a keresett dimenziótlan állandók:

$$\alpha = \frac{32\pi}{5} \left(\frac{3}{64\pi}\right)^{5/3} \approx 0,018; \quad \beta = \frac{5}{3}; \quad \gamma = -2.$$

**3.5.** A csillag teljes energiája

$$E_{\text{teljes}} = E_{\text{grav}} + E_N = -\frac{3}{5} \gamma \frac{M^2}{R} + \alpha' \frac{h^2}{m_e} N^{5/3} R^{-2}, \quad \text{ahol} \quad \alpha' = \frac{3}{10 \cdot 2^{2/3}} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3}.$$

A csillag egyensúlyi állapotát az  $E_{\text{teljes}}(R)$  függvény minimuma adja meg. A szélsőértékhez tartozó  $R_{\text{ft}}$  csillagsugarat deriválással, vagy  $E_{\text{teljes}}(R)$  (ami az  $1/R$  változó másodfokú függvénye) teljes négyzetté alakításával lehet meghatározni. A fehér törpe egyensúlyi sugarára így az

$$R_{\text{ft}} = \frac{10}{3} \frac{h161; N^{5/3} \alpha'}{\gamma M^2 m_e}$$

kifejezést kapjuk. Mivel a csillag összetöltése 0,  $N$  nemcsak az elektronok, hanem a protonok számával is egyenlő. A csillag össztömegét lényegében a benne lévő (egyenként  $m_p$  tömegű) protonok adják, így  $N \approx M/m_p$ . Ezt felhasználva és az ismert adatokat behelyettesítve végül megkapjuk a Naphoz hasonló tömegű fehér törpe sugarát:

$$R_{\text{ft}} = \frac{10}{3} \frac{h161; \alpha'}{\gamma M^{1/3} m_e m_p^{5/3}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{4/3} \frac{h^2}{\gamma M^{1/3} m_e m_p^{5/3}} \approx 22\,800 \text{ km.}$$