Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 4–16. között Thaiföldön, Chiang Mai városában rendezték meg.

A versenyen 104 ország 577 diákja vett részt. Ez a résztvevő országok számát tekintve csúcsbeállítás, a résztvevő versenyzők számát tekintve pedig abszolút csúcs. (2009-ben, Brémában is 104 ország vett részt, de ott a versenyzők száma csak 565 volt.) A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia, Algéria, Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades, Belgium, Belorusszia, Bolívia (5), Bosznia-Hercegovina, Botswana, Brazília, Bulgária, Chile (2), Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, Észak-Korea, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek, Ghána (5), Görögország, Grúzia, Hollandia, Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo, Kuba (1), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein (1), Litvánia, Luxemburg (2), Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (3), Nagy-Britannia, Németország, Nicaragua (3), Nigéria, Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama (3), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (3), Románia, El Salvador (4), Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán (5), Tajvan, Tanzánia (3), Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (4), Tunézia (4), Türkmenisztán, Uganda (5), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Üzbegisztán, Venezuela (2), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 26–42 pontot elért, ezüstérmet a 19–25 pontos, míg bronzérmet a 14–18 ponttal rendelkező tanulók szereztek. Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 14-nél kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Williams Kada (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimn., 10. o.t.) 25 ponttal,
Szabó Barnabás (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 11. o.t.) 22 ponttal és
Fehér Zsombor (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 12. o.t.) 21 ponttal *ezüstérmet,*
Janzer Barnabás (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált Isk. és Gimn., 12. o.t.) 16 ponttal,
Baran Zsuzsanna (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 10. o.t.) 15 ponttal és
Di Giovanni Márk (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. o.t.) 14 ponttal *bronzérmet* szerzett.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyak. Ált. Isk. és Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a problémakiválasztást előkészítő bizottság meghívott tagjaként vett részt az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a 20–21. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. USA 185, 2. Kína 181, 3. Dél-Korea 161, 4. Észak-Korea 156, 5. Vietnam 151, 6. Ausztrália 148, 7. Irán 145, 8. Oroszország 141, 9. Kanada 140, 10. Szingapúr 139, 11. Ukrajna 135, 12. Thaiföld 134, 13. Románia 132, 14. Franciaország 120, 15. Horvátország 119, 16. Peru 118, 17. Lengyelország 117, 18. Tajvan 115, 19. Mexikó 114, **20–21. Magyarország** és Törökország 113, 22–24. Brazília, Japán és Nagy-Britannia 109, 25. Kazahsztán 105, 26. Örményország 104, 27. Németország 102, 28. Hong Kong 101, 29–32. Bulgária, Indonézia, Olaszország és Szerbia 100 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Árki Tamás (DGM), *Bruder Györgyi* (DGM), *Dobos Sándor* (BZs, DGM, FZs, JB, SzB, WK), *Gyenes Zoltán* (FZs, JB, SzB), *Juhász Péter* (DGM), *Kiss Gergely* (FZs, JB), *Kiss Géza* (SzB), *Kosztolányi József* (WK), *Lakatos Tibor* (BZs), *Mike János* (WK), *Molnár-Sáska Gábor* (WK), *Pósa Lajos* (BZs, DGM, FZs, JB, SzB, WK), *Schultz János* (WK), *Surányi László* (FZs, JB, SzB), *Táborné Vincze Márta* (SzB), *Tóth Mariann* (BZs).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá azoknak a tanároknak, fiatal matematikusoknak és egyetemistáknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Chiang Mai környéke természeti és kulturális látványosságokban is bővelkedik – ezekből a szervezők igyekeztek minél többet megmutatni. A legemlékezetesebb program azonban legtöbbünknek alighanem az elefántparkban tett látogatás volt. (E sorok szerzője is először ült életében elefántháton.)

Az olimpiát közvetlenül megelőző intenzív edzőtáborhoz Rockenbauer Gabriella (a tavalyi ezüstérmes Homonnay Bálint édesanyja) biztosított számunkra helyszínt, amiért ezúton is szeretnénk köszönetet mondani.

A következő matematikai diákolimpiát Hong Kong rendezi, 2016. július 6–16. között.

Az 56. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai[1]

[1] Az olimpia honlapja: `http://www.imo2015.org/`.

Első nap

1. feladat. A sík pontjainak egy véges $\mathcal{S}$ halmazát *kiegyensúlyozott*nak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely két különböző A, B pontjához van $\mathcal{S}$-nek olyan C pontja, amire $AC = BC$. $\mathcal{S}$-et *centrum-nélküli*nek nevezzük, ha $\mathcal{S}$ bármely három páronként különböző A, B, C pontjára teljesül az, hogy nincs $\mathcal{S}$-nek olyan P pontja, amire $PA = PB = PC$.

(a) Mutassuk meg, hogy bármely $n \geq 3$ egész számhoz létezik n elemű kiegyensúlyozott halmaz.

(b) Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egészeket, amelyekre létezik n elemű kiegyensúlyozott, centrum-nélküli halmaz.

2. feladat. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokból álló (a, b, c) számhármasokat, amelyekre az

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

számok mindegyike 2-hatvány.

(2-*hatvány egy* 2^n *alakú egész szám, ahol* n *egy nemnegatív egész szám.*)

3. feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, amiben $AB > AC$. Legyen Γ ezen háromszög körülírt köre, H a magasságpontja és F az A-ból kiinduló magasság talppontja. Legyen M a BC szakasz felezőpontja. Legyen Q Γ-nak az a pontja, amire $HQA\sphericalangle = 90°$, és K Γ-nak az a pontja, amire $HKQ\sphericalangle = 90°$. Feltesszük, hogy az A, B, C, K, Q pontok mind különbözőek, és ilyen sorrendben követik egymást a Γ körön.

Bizonyítsuk be, hogy a KQH és FKM háromszögek körülírt körei érintik egymást.

Második nap

4. feladat. Az ABC háromszög körülírt köre Ω, a körülírt kör középpontja O. Egy A középpontú Γ kör a BC szakaszt a D és E pontokban metszi, ahol B, D, E, C páronként különböző pontok, amelyek a BC egyenesen ebben a sorrendben fekszenek. Legyenek F és G a Γ és Ω körök metszéspontjai, ahol A, F, B, C, G ebben a sorrendben követik egymást az Ω körön. Legyen K a BDF háromszög körülírt körének és az AB szakasznak a másik metszéspontja. Legyen L a CGE háromszög körülírt körének és a CA szakasznak a másik metszéspontja.

Tegyük fel, hogy az FK és GL egyenesek különbözők és az X pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az X pont az AO egyenesen fekszik.

5. feladat. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyre teljesül

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x)$$

minden x, y valós számra.

6. feladat. Egész számok egy $a_1, a_2, \ldots$ sorozata rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal:

(i) $1 \leq a_j \leq 2015$ minden $j \geq 1$-re;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ minden $1 \leq k < \ell$-re.

Bizonyítsuk be, hogy van két olyan pozitív egész: b és N, hogy

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

teljesül minden olyan m és n egész számra, amire fennáll $n > m \geq N$.