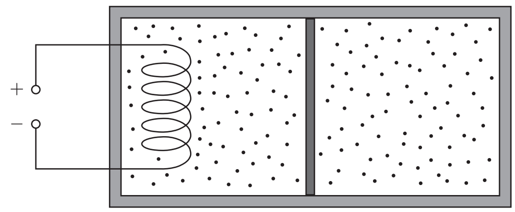
[1]

1. forduló, elméleti rész[2]

1. feladat. (Ez a feladat három független, kisebb részből áll.) *(150 p)*

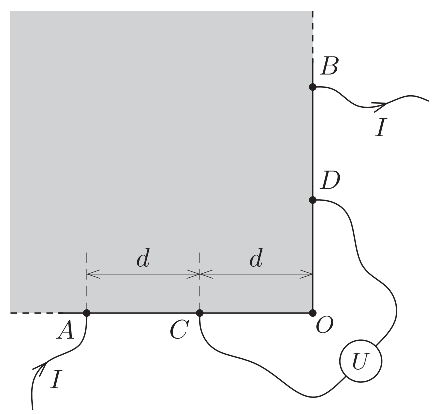
1.A. Egy függőleges tengelyű mérőhenger falába sűrűn, egyenletes elrendezésben apró lyukakat fúrtunk. A hengert H magasságig feltöltjük vízzel, melynek következtében a lyukakon (a mérőhenger falára merőlegesen) vékony vízsugarak lövellnek ki. Milyen alakú a vízsugarak burkolófelülete? (A vízsugarak nem akadályozzák egymást, és folyamatos utántöltéssel gondoskodunk a hengerben a vízszint állandóságáról.) *(50 p)*

1.B. Hőszigetelt hengert egy könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú oszt két részre az *1. ábrán* látható módon. A két rekeszben azonos anyagmennyiségű és (kezdetben) azonos hőmérsékletű héliumgáz van. A bal oldali térrészben lévő gázt egy fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük. Mekkora ebben a folyamatban a bal oldali gáz mólhője, amikor a dugattyú elmozdulása még kicsi? *(50 p)*



1. ábra

1.C. Egy nagyméretű, négyzet alakú, vékony fémlemez anyagának fajlagos ellenállását szeretnénk megmérni. Ehhez a lemez egyik csúcsának közelében kiválasztjuk a két szomszédos oldalélen található A, B, C és D pontokat a *2. ábrán* látható módon. (Az A és B pontok távolsága a kiválasztott csúcstól $2d$, a C és D pontoké pedig d, ahol d sokkal kisebb a fémlemez oldalhosszánál.)



2. ábra

Ha az A pontba I erősségű áramot vezetünk, a B pontból pedig elvezetjük azt, akkor a C és D pontok közé kapcsolt voltmérő U feszültséget jelez. Határozzuk meg a fémlemez ϱ fajlagos ellenállását, ha tudjuk, hogy a lemez vastagsága δ! *(50 p)*

2. feladat. Furfangos szökőkút *(150 p)*

Köztereken, parkokban gyakran láthatunk olyan szökőkutat, amely „vízen úszó” gránitgömbből vagy gránithengerből áll (lásd a *3. ábrát*). Az ilyen szökőkutak felépítése a következő: a (rendszerint tömör) gránitgömb vagy gránithenger egy jól illeszkedő vályúban található, melynek alján rés van. A résen keresztül egy szivattyú folyamatosan vizet pumpál a vályúba, amely a vályú pereménél kifolyik. A gránittömb és a vályú között vékony (általában 1–2 milliméter vastagságú) vízréteg alakul ki, így a gránit nem érintkezik a vályú falával, csak a vízzel. Vajon hogyan képes megtartani a víz a nála sokkal nagyobb sűrűségű gránittömb súlyát? Ez a feladat ezzel a kérdéssel foglalkozik.

---

[1] *Kunfalvi Rezső* (1905–1998) a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiák egyik alapítója és sok éven keresztül a magyar csapat felkészítője, vezetője volt. 1959-től 1975-ig ő szerkesztette a KöMaL (korábban KML) fizika „rovatát”. Emlékét az olimpiai válogatóverseny is őrzi.

[2] Az elméleti forduló időtartama 4 óra volt. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehetett szerezni. Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik (lásd a feladatsor végét), ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat és hasznos matematikai összefüggéseket tartalmazza.

A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem volt használható.

A verseny igyekezett követni a Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti versenyeinek stílusát, nehézségi fokát, és azok formai követelményeihez igazodott.

A feladatokat *Vigh Máté* (ELTE), a magyar csapat egyik felkészítője állította össze.

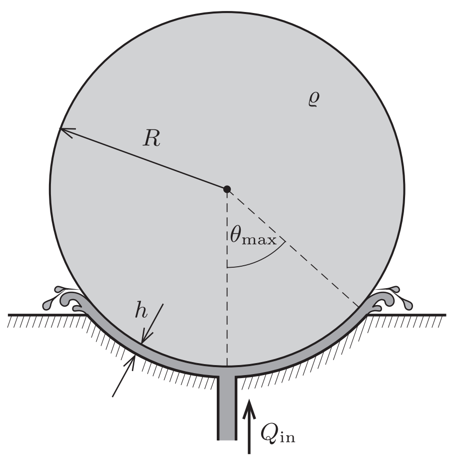
A feladatok megoldását a jövő havi számunkban közöljük.

3. ábra

Az egyszerűség kedvéért a gránittömböt egy L hosszúságú, R sugarú, ϱ sűrűségű tömör hengernek tekintjük, ahol $L \gg R$. A vályú alján található befolyónyílás legyen egy L hosszúságú, keskeny rés, így a feladat során elegendő csupán a *4. ábrán* látható síkmetszetben vizsgálódnunk. A vályú magasságát a θ_{max} szöggel jellemezhetjük. A résen áthaladó vízhozamot az időegység alatt befolyó víz térfogatával írhatjuk le, amely időben állandó:

$$Q_{\mathrm{be}} \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

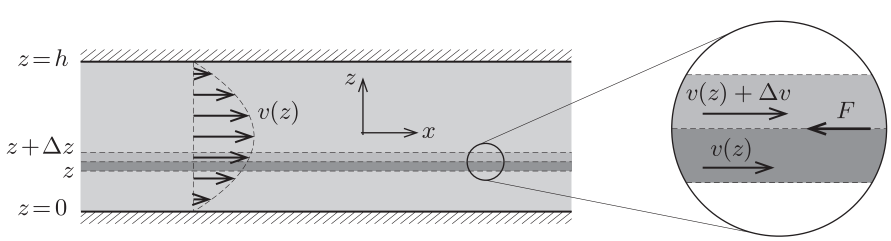
A feladatban vizsgált konkrét szökőkútnál legyen $L = 2$ m, $R = 0{,}3$ m, $\theta_{\mathrm{max}} = 30°$; a gránit ϱ sűrűsége pedig a víz $\varrho_{\text{víz}}$ sűrűségének 2,75-szerese.



4. ábra

2.1. A víz hidrosztatikai felhajtóereje nyilván nem képes megtartani a gránithenger súlyát. Adjuk meg a felhajtóerő és a gránithengerre ható nehézségi erő hányadosát ϱ, $\varrho_{\text{víz}}$ és θ_{max} segítségével, majd adjuk meg az eredményt számszerűen is! *(10 p)*

A továbbiakban a felhajtóerő szerepét hanyagoljuk el! A gránithengert megtartó erő megértéséhez figyelembe kell vennünk az áramló víz belső súrlódását. Ehhez tekintsünk egy folyadékot, amely két vízszintes, párhuzamos, egymástól h távolságra lévő síklap között lassan áramlik x irányban (lásd az *5. ábrát*).



5. ábra

Ha két szomszédos folyadékréteg (például az 5. ábrán látható, az alsó síklaptól z és $z + \Delta z$ távolságra található rétegek) különböző sebességgel mozog, akkor közöttük a Δv relatív sebességükkel és az érintkezési felületük nagyságával arányos súrlódási erő ébred (Newton-féle súrlódási törvény):

(1) $$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z},$$

ahol η a folyadék anyagára jellemző állandó, a viszkozitás. Ez az erő benne van a folyadékok érintkezési felületének síkjában, és a relatív sebességgel ellentétes irányba mutat. A $\sigma = F/A$ mennyiséget nyírófeszültségnek nevezzük.

2.2. Mivel a folyadék z irányban nem áramlik, így ebben az irányban nem hat nyírófeszültség, ezért a folyadékban a nyomás csak az x koordinátától függ, z-től nem. Mutassuk meg, hogy stacionárius (időben állandó) áramlás esetén a $\sigma(z)$ nyírófeszültség térbeli változása (gradiense) és a $p(x)$ nyomás gradiense között fennáll a

(2) $$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z}$$

összefüggés. *(20 p)*

2.3. A (2) egyenlet bal oldala csak x-től, jobb oldala pedig csak z-től függ, ezért mindkét oldalnak külön-külön állandónak kell lennie. Jelöljük ezt az állandót $-K$-val, ahol K pozitív mennyiség:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} = -K.$$

Lássuk be, hogy a síklapok között a folyadék sebessége a

(3) $$v(z) = Az^2 + Bz + C$$

függvénnyel írható le, és határozzuk meg az A, B és C konstansok értékét η, h és K segítségével! (A folyadék sebessége a síklapoknál nulla.) *(25 p)*

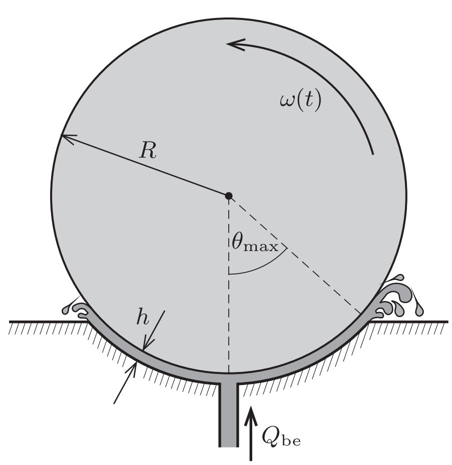
2.4. A szökőkút esetében a vízréteg vastagsága sokkal kisebb a gránithenger sugaránál, ezért használhatjuk a **2.2**–**2.3** részfeladatokban kapott eredményeket. Határozzuk meg, mekkorának kell lennie a túlnyomásnak a vályú alján (a víz beáramlási pontjánál) ahhoz, hogy a gránithenger egyensúlyban legyen! Válaszunkat ϱ, R, θ_{max} és a g nehézségi gyorsulás segítségével adjuk meg! (Számításainkban a hengerre érintőirányban ható nyírófeszültség hatását és a Bernoulli-törvényből származó nyomáscsökkenést hanyagoljuk el.) *(30 p)*

2.5. Határozzuk meg a vályú alján található nyíláson beáramló víz Q_{be} hozamát, ha ismert, hogy a vályú és a gránithenger közötti vízréteg vastagsága h. A választ az η, ϱ, θ_{max}, g, L és h mennyiségek felhasználásával adjuk meg. *(25 p)*

2.6. Ha a gránithengert tengelye körül forgásba hozzuk, a **2.3.** részfeladatban a víz sebességprofiljára kapott (3) formulát módosítani kell egy z-vel egyenesen arányos tag hozzáadásával:

$$v(z, \omega) = v(z) \pm Dz,$$

ahol $v(z,\omega)$ a henger ω szögsebességétől függő sebességprofil, D a szögsebességet tartalmazó arányossági tényező, a $\pm$ előjel pedig a henger két oldalán áramló folyadékrészre utal. Fejezzük ki D értékét ω, R és h segítségével, ha továbbra is fennáll, hogy a víz falakhoz viszonyított relatív sebessége zérus. *(15 p)*



6. ábra

2.7. Forgás közben a víz által kifejtett nyírófeszültség fékezi a gránithengert. Milyen mozgást végez ekkor a henger? Adjuk meg a henger szögsebességét az idő függvényében, ha a kezdeti szögsebessége ω_0. A választ ϱ, R, h, $\theta_{\max}$, ω_0 és η segítségével adjuk meg! *(25 p)*

3. feladat. Fehér törpék keletkezése *(150 p)*

A Naphoz hasonló, életük derekán járó csillagok stabil objektumok. A csillag belsejében magfúzió útján folyamatosan termelődő energia igyekezne a csillag anyagát kifelé lökni; ez az effektus akadályozza meg a gravitációs összeomlást és tartja fenn a stabil egyensúlyt. Az egyensúlyi állapot mindaddig fennáll, amíg el nem fogy az összes hidrogén: ekkor a gravitációs vonzás elkezdi összeroppantani a csillagot. A Nappal megegyező (vagy ahhoz közeli) tömegű csillagok esetében ez az összeroskadás nem tart örökké: a *fehér törpe* állapot elérésével a csillag stabilizálódik, az összeroppanás befejeződik. Ez a feladat a fehér törpék keletkezésének fizikájával foglalkozik.

3.1. Vizsgáljunk egy gömb alakú, R sugarú, M tömegű csillagot. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a csillag tömegeloszlása egyenletes. Határozzuk meg a csillag teljes E_{grav} gravitációs energiáját! *(30 p)*

A magfúzió leállásakor a gravitáció összehúzó hatását kezdetben semmi sem tudja ellensúlyozni, ezért a csillag sugara csökkenni kezd. Ez a folyamat azonban egy kvantummechanikai hatásnak (a csillagban lévő elektronok ún. *degenerációs nyomásának*) köszönhetően megállhat, és a csillag stabil végállapotba kerülhet (*fehér törpe*). A **3.2.–3.4.** részfeladatok a degenerációs nyomás fizikai okával foglalkoznak.

3.2. Tekintsünk egy L oldalélű, kocka alakú dobozba zárt elektront. A derékszögű koordináta-rendszerünk tengelyeit válasszuk a kocka oldaléleivel párhuzamosnak. Adjuk meg az elektron (p_x, p_y, p_z) impulzuskomponenseinek lehetséges értékeit L és a h Planck-állandó segítségével! *(20 p)*

3.3. Ha a **3.2.** részfeladatban szereplő kocka alakú dobozba nem egy, hanem N darab ($N \gg 1$) elektront helyezünk, akkor alapállapotban az elektronok a lehetséges legalacsonyabb energiájú állapotokat töltik be. (Most és a továbbiakban az elektronok közötti Coulomb-kölcsönhatást **hanyagoljuk el**, mert az a kvantumos viselkedésből származó erőhatásnál sokkal gyengébb.) A Pauli-elv értelmében azonban egyszerre legfeljebb két elektron lehet ugyanabban a (p_x, p_y, p_z) számhármassal jellemzett kvantumállapotban. Mutassuk meg, hogy alapállapotban azok az elektronállapotok betöltöttek, melyek impulzusára fennáll a $\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \le p_{\max}$ egyenlőtlenség, és adjuk meg $p_{\max}$ (közelítő) értékét L és N függvényében! *(30 p)*

3.4. Mutassuk meg, hogy ekkor az N elektront tartalmazó rendszer teljes (kinetikus) energiája

$$E_N = \alpha \cdot \frac{h^2}{m_{\text{e}}} N^\beta L^\gamma$$

alakú, ahol α, β és γ dimenziótlan konstansok. Határozzuk meg ezen konstansok számszerű értékét! (Vegyük figyelembe, hogy N nagy, ezért a szummázást integrállal közelíthetjük. A kocka alakú doboz mérete elegendően nagy ahhoz, hogy a bezárt elektronok viselkedése nemrelativisztikus legyen.) *(40 p)*

Mivel a csillagok nem kocka alakúak, a degenerációs energia pontos kiszámításához a **3.4.** részfeladatban kapott egyenlet kis változtatásra szorul. L helyére a csillag R sugarát helyettesítve, valamint α értékét módosítva azonban helyes formulához jutunk:

$$E_N = \frac{3}{10 \cdot 2^{2/3}} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{m_{\text{e}}} N^\beta R^\gamma,$$

ahol β és γ a korábban kapott értékek, N pedig az elektronok száma. (A csillag összességében semleges, és feltehetjük, hogy ugyanannyi protont tartalmaz, mint elektront. A protonok is létrehoznak degenerációs nyomást, ez azonban a nagy tömegük miatt sokkal kisebb, mint az elektronok járuléka, ezért elhanyagolható.)

3.5. A csillag teljes energiája az E_{grav} gravitációs energia és az E_N degenerációs energia összege. Írjuk fel a teljes energiát a csillag sugarának függvényében, majd határozzuk meg a csillag végső, egyensúlyi R_{ft} sugarát, az úgynevezett fehér törpe rádiuszt! Számítsuk is ki számszerű értékét a Nap esetére! *(30 p)*

Fizikai állandók táblázata

univerzális gázállandó:	$R = 8{,}314\ \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
gravitációs állandó:	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
Planck-állandó:	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$
elektron tömege:	$m_{\text{e}} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$
proton tömege:	$m_{\text{p}} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
a Nap tömege:	$M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$

Hasznos matematikai összefüggések

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C;$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C; \qquad \int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C.$$