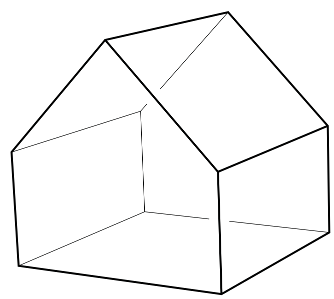
Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:
a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
b) $\log_2 x + \log_4 x = 21$. (*11 pont*)

2. *a*) Gábor 18. születésnapjára 18 vendég volt hivatalos. A vendégek mindegyike pontosan négy vendéget ismert. Az est folyamán minden vendég tombolasorsoláson vett részt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tombolasorsolás két nyertese ismeri egymást?
b) Hány csúcsa van annak a fagráfnak, amelybe 78 élt kell berajzolnunk, hogy teljes gráfot kapjunk? (*12 pont*)

3. A *vázlatrajz* egy házikóra hasonlító ötszögalapú egyenes hasáb vázlatát mutatja. Ezt a szemléltetőeszközt egy 12 cm élű bükkfakockából fűrészelték ki. A házikó hossza, szélessége, magassága 12 cm, a tető két síkja merőleges egymásra és egybevágó.



a) Mekkora a test felszíne?
b) Mennyivel lenne könnyebb ez a szemléltetőeszköz, ha lucfenyőből készítették volna?
(A bükkfa sűrűsége 0,68 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, a lucfenyő sűrűsége 0,43 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.) (*14 pont*)

4. Két dobókockával 24-szer dobtunk. A dobott számok összege a következő gyakorisági táblázatot adta:

Dobott érték	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gyakoriság	0	1	2	4	5	7	3	1	1	0	0

a) Mutassuk meg, hogy a huszonötödik dobás értéke nem lehet olyan, hogy a dobások értékének számtani közepe, mediánja, módusza valamilyen sorrendben egy nem állandó számtani sorozat három egymást követő tagja legyen.
b) Az elméletileg számított valószínűségekhez képest melyiket mondhatjuk szélsőségesebbnek, azt hogy 7 darab 7-est, vagy azt, hogy csak 3 darab 8-ast dobtunk? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott a koordináta-rendszerben az $A(-1;0)$, $B(1;0)$ pontpár, továbbá a C_n nemnegatív koordinátájú pontok, amelyekre $AC_n = BC_n = n$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. Legyen $a_n = C_{n+1}C_n$.
a) Adjuk meg az $\{a_n\}$ sorozat első három tagját.
b) Igazoljuk, hogy $\{a_n\}$ szigorúan monoton csökkenő sorozat.
c) Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}$ sorozatnak az 1 alsó korlátja. (*16 pont*)

6. *a*) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hozzárendeléssel adott függvényről tudjuk a következőket:
I. $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{53}{12}$.
II. A -2 abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenlete: $y = 7x + 29$.
Adjuk meg $f(13)$ értékét.

b) Igazoljuk, hogy a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^3-x^2-9x+9$ hozzárendeléssel adott függvénynek három zérushelye van. (*16 pont*)

7. *a*) A $K(4;2)$ középpontú, $\sqrt{40}$ sugarú kör és az x tengely két metszéspontja legyen A és B. Az ABC háromszögben $AC=BC$, továbbá az ABC háromszög beírt körének középpontja K. Adjuk meg a C pont koordinátáit.

b) Az $y=x^2-2x-3$ egyenletű parabola és az x tengely két metszéspontja legyen A és B. Az AB szakasz felezőpontját F-fel, a parabola tengelypontját T-vel jelöljük, a parabolához A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontját pedig C-vel. Mutassuk meg az egy egyenesre illeszkedő F, T, C pontokra, hogy T az FC szakasz felezőpontja. (*16 pont*)

8. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív x értéket, amelyre

a) $\lg x$ és $\lg 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\lg 3x$ pedig az átfogója;

b) $\sin x$ és $\sin 2x$ egy derékszögű háromszög befogói, $\sin 3x$ pedig az átfogója.

(*16 pont*)

9. A magyar kártyában négy szín található (zöld, makk, tök, piros) és minden színhez nyolc figura tartozik (VII, VIII, IX, X, alsó, felső, király, ász). Gyuri, Csaba és István ultiznak. Ezt a kártyajátékot magyar kártyával játsszák. Az osztás során mindenki tíz lapot kap, és két lap marad talonban.

a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a talonba kerülő két lapon különböző figura lesz.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Gyuri megkapja mind a négy ászt?

c) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy Csabánál nem lesz VII-es lap.

d) Ha tudjuk, hogy István kapott legalább egy VII-es lapot az osztáskor, akkor számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy mind a négy VII-es hozzá kerül. (*16 pont*)