Vegyük észre, hogy az adatok közt ott szerepel a C, D, E és A-ból alakítható mind a 6 pontpár közti távolság, továbbá bármelyiküket elhagyva, a maradó ponthármasra teljesülnek a háromszög egyenlőtlenségek. Eszerint ez a 4 pont egyértelműen meghatároz egy háromoldalú gúlát (tetraédert).

Ugyanezek érvényesek a C, D, E, B pontnégyesre. És mivel e két tetraéder CDE lapja közös, az A és B pontok kölcsönös helyzete, távolsága is meg van határozva annak az alternatívának az erejéig, hogy A és B a CDE síknak ugyanazon az oldalán van-e vagy nem. Megállapodhatunk, hogy A-t mindkétszer a CDE sík fölött vesszük, itt legyen a B_1 megoldás is, ekkor B_2, a másik megfelelő pont, a B_1 tükörképe a CDE síkra.

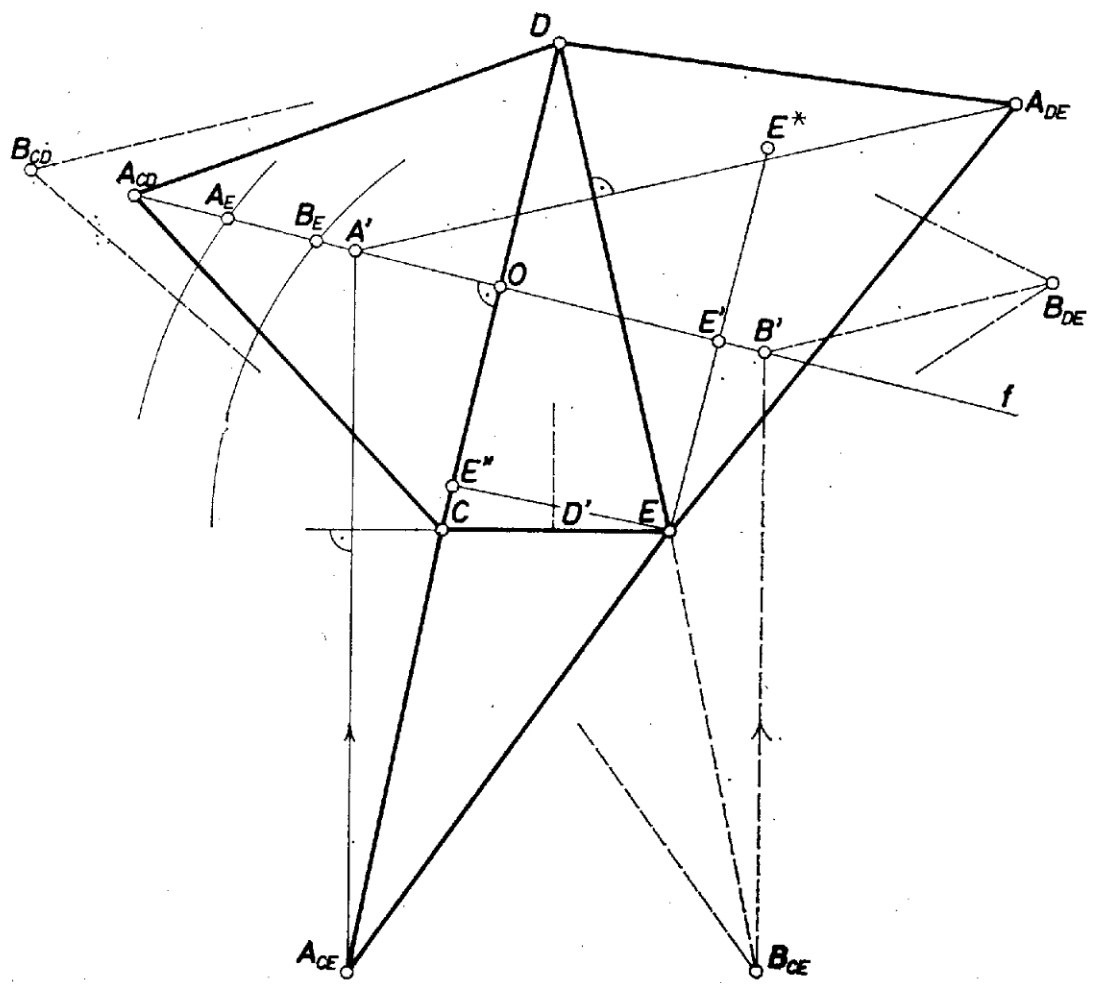
Elsősorban ezzel a kettősséggel véljük megmagyarázni a feladat kérdésének „lehet" szavát. Gondolnunk kell azonban az eddig nem említett F pontra is, amelynek a két tetraéder közös D csúcsától, valamint a nem közös A, B csúcsaiktól való távolságai is elő vannak írva. Ez lesz tehát a további kérdés (AB_1 és AB_2 kiszámítása után): létezik-e az AB_1DF és az AB_2DF tetraéder? Ha esetleg csak az egyik léteznék, ez egyértelművé tenné válaszunkat.

Elgondolásunk az első kérdésre: gömböt írunk a CDE háromszög mindegyik csúcsa körül, sugárnak véve az onnan A-ig – illetve B-ig – előírt távolságot, és mindkétszer keressük a 3 gömb közös pontjait (fönt, illetve fönt és lent), majd az ezek közti távolságokat. Ezt azonban síkbeli feladattá egyszerűsíti az az észrevétel, hogy $AC = AD$ és $BC = BD$ alapján A-nak és B-nek a CD élen levő vetülete egybeesik, méghozzá az él O felezőpontjában. Jelöljük S-sel az O-ban CD-re állított merőleges síkot, ekkor elég gondolnunk a gömbökből S által kimetszett körökre; pontosabban csupán 2–2 körre, hiszen a C és D körül írt gömbök S-ben metszik egymást, közös az S-beli körük.

Egyszerűsödik a második kérdés is ugyanebből a meglátásból, illetve előre megadható a válasz: igenis lesz közös pontja az A körül AF sugárral, B körül BF, valamint D körül DF sugárral írt gömböknek – a B_1 és B_2 megoldás mellett egyformán. Abból látjuk ezt, hogy e 3 újabb sugár rendre egyezik 1–1 már figyelembe vett mérettel. F szerepére megfelel E-nek S-re való E^* tükörképe, mert

$$E^*D = EC = 5 = FD, \quad E^*A = EA = 12 = FA, \quad E^*B = EB = 10 = FB.$$

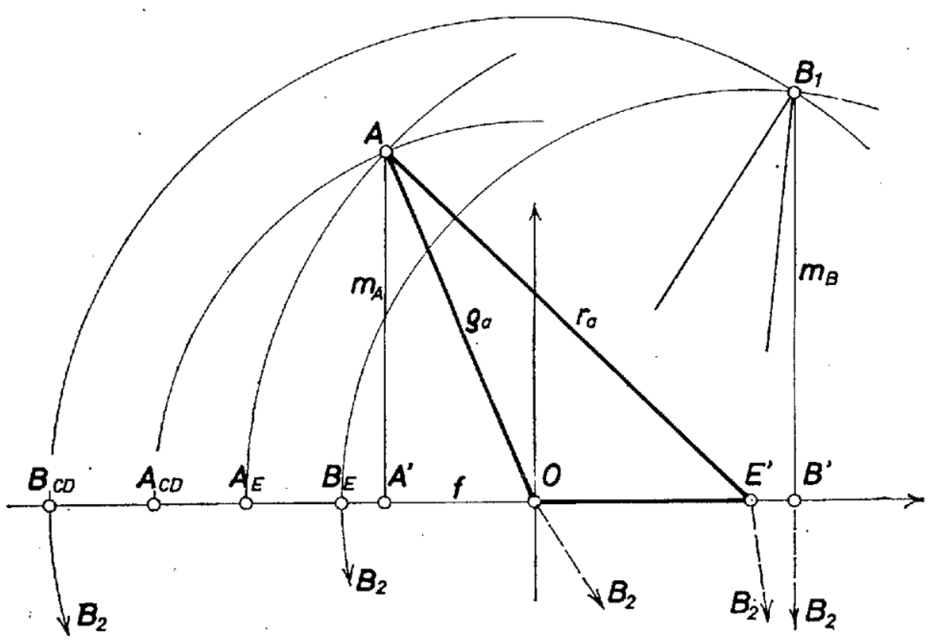
(Megfelel persze E^*-nak a DAB_1, illetve DAB_2 síkra való tükörképe is, de elég belátni egy ilyen pont létezését.)



1. ábra

Számításaink céljára felvágjuk a tetraéder modelljének A-ból induló éleit és az oldallapokat alapélük körül befordítjuk a CDE alaplap síkjába, legyen A-nak a CD, DE, EC él körüli befordítottja A_{CD}, A_{DE}, A_{EC}. Így az oldallapok valódi nagyságban megszerkeszthetők: $A_{CD}CD$ s í. t. A lapokat visszaforgatva az $A_{CD}, \ldots$ pontok a $CD, \ldots$ tengelyre merőleges egyenesek „fölött" jutnak vissza A-ba, ezek metszéspontja tehát megadja az A-nak az alapsíkon levő

A' vetületét. Az 1. ábrán mindezt a B pontra is vázoljuk. Az alapsíkon levő vetület alátámasztja S-beli gondolt szerkesztésünket (2. ábra), illetve méreteket szolgáltat hozzá.



2. ábra

Rátérve a számításra, az S-ben A-t, illetve B-t meghatározó egyik–egyik kör középpontja O, illetve E-nek az f felező merőlegesen levő E' vetülete, sugaraik rendre

$$\varrho_a = \sqrt{CA^2 - CO^2} = \sqrt{69{,}75}, \qquad r_a = \sqrt{EA^2 - EE'^2},$$
$$\varrho_b = \sqrt{CB^2 - CO^2} = \sqrt{113{,}75}, \qquad r_b = \sqrt{EB^2 - EE'^2}.$$

A két középpont távolsága egyenlő a CDE háromszög E-ből induló magasságával:

$$OE' = E''E = \frac{CE \cdot D'D}{CD} = \frac{5}{11}\sqrt{11^2 - 2{,}5^2} = \frac{5}{11}\sqrt{114{,}75},$$

másrészt hasonló háromszögekből

$$EE' = CO - CE'' = \frac{CD}{2} - \frac{CE^2}{2 \cdot CD} = \frac{48}{11},$$

és most már az E' körüli körök sugarainak számértékei:

$$r_a = \frac{12}{11}\sqrt{105}, \quad r_b = \frac{2}{11}\sqrt{2449}.$$

Ezt a két sugarat is szemlélteti az 1. ábra az $E'A_E$, $E'B_E$ szakaszokban, A_E, ill. B_E végpontjukat az E körüli megfelelő gömbnek az alapsíkbeli főköre metszi ki f-ből.

Ezek alapján az AOE' háromszögből a cosinustétel alapján

$$OA' = OA \cos AOE\sphericalangle = \frac{\varrho_a^2 + OE'^2 - r_a^2}{2 \cdot OE'} = -3{,}2346,$$

ebből A magassága az alapsík fölött

$$m_A = A'A = \sqrt{\varrho_a^2 - OA'^2} = 7{,}6998,$$

továbbá hasonlóan a B pontokra

$$OB' = 5{,}8018, \qquad m_B = B'B = \pm 8{,}9492.$$

Ezzel tulajdonképpen A és B koordinátáit kaptuk abban a rendszerben, amelynek origója O és első tengelye f. Ezek alapján, mivel $A'B' = A'O + OB' = 9{,}0364$,

$$AB_1 = \sqrt{A'B'^2 + (m_A - m_B)^2} = 9{,}122,$$
$$AB_2 = \sqrt{A'B'^2 + (m_A + m_B)^2} = 18{,}943.$$

Megjegyzések. 1. Tetraédereink *magasságai* rövidebben is meghatározhatók a 6–6 élből, de – mint láttuk – szükség volt A és B vetülete helyzetének meghatározására is. Ha a tetraéder egy lapjának oldalai a, b, c és a hozzájuk képest kitérő élek rendre a_1, b_1, c_1, akkor a V térfogatra:

$$144\,V^2=(a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2)(a^2+b^2+c^2+a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2a^2a_1^2(a^2+a_1^2)-$$
$$-2b^2b_1^2(b^2+b_1^2)-2c^2c_1^2(c^2+c_1^2)-a^2b^2c^2-a^2b_1^2c_1^2-a_1^2b^2c_1^2-a_1^2b_1^2c^2.$$

Hasonlóan az a, b, c oldalakkal bíró háromszög t területére

$$16\,t^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

(az ún. Herón–féle területképlet kifejtéséből),így

$$m_A^2=\left(\frac{3\,V}{t}\right)^2=\frac{144\,V^2}{16\,t^2}.$$

2. Ez a feladat sajnálatos elnézés folytán egyetlen betűben eltért a szerkesztő bizottság elgondolásától, és ezzel alapvetően megváltozott a jellege. Ez már természetes magyarázatot sejtet F „különös” szereplésére. Előre fölhívjuk megoldóink fÏgyelmét a májusban közlendő eredeti elgondolásra.

B. T.