Megoldásvázlatok a 2014/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\frac{2x^2-12x+107}{x^3-7x-6}=\frac{x^2+8x+16}{(x-3)\big(x^2+3x+2\big)}. \qquad (11\ pont)$$

Megoldás. A $(x-3)\big(x^2+3x+2\big)\neq 0$, mert a tört nevezőjéről van szó. A másodfokú tényező zérushelyeit is meghatározva kapjuk: $x\neq -2,-1,3$. A két nevezőről a beszorzás elvégzésével megállapíthatjuk, hogy egyenlők: $(x-3)\big(x^2+3x+2\big)=x^3-7x-6$. Ezek szerint a feladat értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;3\}$.

Mivel a két tört nevezője egyenlő, ezért egyenlőség akkor és csak akkor állhat fenn, ha a számlálók is egyenlők:

$$2x^2-12x+107=x^2+8x+16,$$
$$x^2-20x+91=0.$$

A megoldóképlettel kapjuk: $x_1=7$, $x_2=13$.

Ezek az egyenlet gyökei, mert mindkettő benne van az értelmezési tartományban.

2. *A lottósorsolás előtt a sorsoló gömbben elhelyeztek 90 golyót 1-től 90-ig megszámozva.*

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két golyót kihúzva egy köbszám két egész szomszédja lesz a kisorsolt két szám?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre öt golyót kihúzva a húzott számok számjegyei mind párosak lesznek? (*12 pont*)

Megoldás. *a)* 1-től 90-ig három olyan köbszám található, amelyeknek mindkét egész szomszédja szerepel a golyókon: 8, 27, 64. Ezek alapján tudjuk, hogy három megfelelő számpárt húzhatunk: $(7;9)$, $(26;28)$, $(63;65)$.

A 90 golyó közül kettőt $\binom{90}{2}=4005$-féleképpen lehet kiválasztani.

A keresett valószínűséget a kedvező és az összes esetek hányadosaként kapjuk:

$$P=\frac{3}{4005}\approx 0{,}00075.$$

b) Az egyjegyűek között a 2, 4, 6, 8 számok lesznek a megfelelőek. A kétjegyűek között a 20, 40, 60 és 80 számok megfelelnek a feltételeknek, és az utánuk következő négy-négy páros szám is. Vagyis összesen 24 olyan szám van 1-től 90-ig, amelynek a számjegyei párosak. Ha mind az öt kihúzott szám ezek közül való, akkor kedvező esetet kapunk.

Ezek alapján a kedvező esetek száma: $\binom{24}{5}=42\ 504$. Az összes esetek száma: $\binom{90}{5}=43\ 949\ 268$. A keresett valószínűséget most is a kedvező és az összes esetek hányadosaként kapjuk:

$$P=\frac{42\ 504}{43\ 949\ 268}\approx 0{,}00097.$$

3. *a) Az $x^2-(4k-2)x+y^2-(2k+4)y+c=0$ köregyenletben határozzuk meg a k és a c paraméter értékét úgy, hogy a kör érintse mindkét koordinátatengelyt.*

b) Az $x^2-10x+y^2-10y+25=0$ egyenlettel megadott körvonalra illeszkedik az ABC szabályos háromszög minden csúcsa. Adjuk meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha $A(5;10)$. (*14 pont*)

Megoldás. *a)* A megadott egyenletet hozzuk $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$ alakra:

$$(x-2k+1)^2-(2k-1)^2+(y-k-2)^2-(k+2)^2+c=0,$$
$$(x-2k+1)^2+(y-k-2)^2=(2k-1)^2+(k+2)^2-c.$$

A kör mindkét koordinátatengelyt akkor érinti, ha (1) $u=v$, (2) $u=-v$.

(1) Ebben az esetben: $2k-1=k+2$, azaz $k=3$. A kör egyenlete így alakul:

$$(x-5)^2+(y-5)^2=(2\cdot 3-1)^2+(3+2)^2-c=50-c.$$

Mivel a kör középpontjának koordinátái $(5;5)$, így a kör sugara is 5, vagyis $50-c=25$, azaz $c=25$.

(2) Ebben az esetben: $2k-1=-k-2$, azaz $k=-\dfrac{1}{3}$. A kör egyenlete ekkor így alakul:

$$\left(x+\frac{5}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}+\frac{25}{9}-c=\frac{50}{9}-c.$$

Mivel a kör középpontjának koordinátái $\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$, így a kör sugara $\frac{5}{3}$, vagyis $\frac{50}{9} - c = \frac{25}{9}$, azaz $c = \frac{25}{9}$.

A k és c paraméterekre a fenti két értékpárt kaptuk.

b) A kör egyenletét $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ alakra tudjuk hozni. Ennek ismeretében a kör középpontja: $K(5;5)$, a sugara: $r = 5$.

Az $r = 5$ sugarú körbe $m = 7{,}5$ magasságú szabályos háromszög írható. A szabályos háromszög a oldala és m magassága közötti kapcsolat: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Vagyis ebben az esetben:

$$a = \frac{2 \cdot 7{,}5}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\,.$$

Az is megállapítható, hogy a megadott $A(5;10)$ pont a kör y tengellyel párhuzamos átmérőjének felső végpontja lesz. A szabályos háromszög további csúcsai:

$$B\left(5 - \frac{a}{2}; 10 - m\right), \quad C\left(5 + \frac{a}{2}; 10 - m\right).$$

Az a és az m értékeit behelyettesítve:

$$B\left(5 - \frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right), \quad C\left(5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

4. *a*) *Hány olyan négyjegyű szám van, amely osztható 9-cel és 3-ra végződik?*

b) *Egy számtani sorozat első 33 páratlan sorszámú elemének összege A, az első 32 páros sorszámú elemének összege B, az első 32 páratlan sorszámú elemének összege pedig C. Tudjuk, hogy $A - B = 323$ és $B - C = 320$. Mennyi a sorozat 50. eleme?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A 3-ra végződő négyjegyű szám akkor osztható 9-cel, ha a 3 előtt levő háromjegyű szám 9-cel osztva 6 maradékot ad. Vagyis a 105, 114, ..., 996 számokra kell gondolnunk. Ezek száma 100. Ezek lesznek azok a számok, amelyekhez egy 3-as számjegyet írva megfelelő számot kapunk.

Vagyis 100 darab olyan négyjegyű szám van, amely osztható 9-cel és 3-ra végződik.

b) Legyen a feladatban szereplő számtani sorozat első eleme a, a differenciája d.

Az első 33 páratlan sorszámú elemének összegét úgy vehetjük, mint egy a első elemű és $2d$ differenciájú számtani sorozat első 33 tagjának összegét:

$$A = 33 \cdot \frac{2a + (33-1) \cdot 2d}{2} = 33a + 1056d.$$

Az első 32 páros sorszámú elemének összegét úgy vehetjük, mint egy $a + d$ első elemű és $2d$ differenciájú számtani sorozat első 32 tagjának összegét:

$$B = 32 \cdot \frac{2(a+d) + (32-1) \cdot 2d}{2} = 32a + 1024d.$$

Az első 32 páratlan sorszámú elemének összegét úgy vehetjük, mint egy a első elemű és $2d$ differenciájú számtani sorozat első 32 tagjának összegét:

$$C = 32 \cdot \frac{2a + (32-1) \cdot 2d}{2} = 32a + 992d.$$

A szöveg szerint:

$$A - B = (33a + 1056d) - (32a + 1024d) = a + 32d = 323,$$

és

$$B - C = (32a + 1024d) - (32a + 992d) = 32d = 320.$$

Vagyis $d = 10$, $a = 3$.

A sorozat 50. eleme az $a + 49d = 3 + 49 \cdot 10 = 493$.

II. rész

5. *a*) *Két szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a, a fehérrel dobott pedig legyen b. Mekkora a valószínűsége annak, hogy két egész gyöke lesz az $ax^2 + bx = 0$ egyenletnek?*

b) *Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a, a fehérrel dobott legyen b, a zölddel dobott pedig legyen c. Mekkora a valószínűsége annak, hogy két azonos, egész gyöke lesz az $ax^2 - bx + c = 0$ egyenletnek?*

c) *Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a, a fehérrel dobott legyen b, a zölddel dobott pedig legyen c. Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző, pozitív egész gyöke lesz az $x^3 - 6x^2 + (a+b)x - c = 0$ egyenletnek?* (*16 pont*)

Megoldás. a) A hiányos másodfokú egyenlet $x(ax+b)=0$ alakban is írható. Ennek az egyenletnek az egyik gyöke az $x_1=0$, a másik gyöke az $x_2=-\frac{b}{a}$. Vagyis csak azok a dobások jöhetnek szóba, amikor a piros kockával dobott szám osztója a fehér kockával dobott számnak. A megfelelő párok a következők:

b	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	6	6
a	1	1	2	1	3	1	2	4	1	5	1	2	3	6

A táblázat alapján látható, hogy a kedvező esetek száma: 14. A két különböző színű kockával dobható összes esetek száma: $6\cdot 6=36$.

A keresett valószínűség: $P=\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$.

b) Szükséges feltétel, hogy a diszkrimináns nulla legyen: $b^2-4ac=0$, azaz $b^2=4ac$.

Mivel a $4ac$ páros, ezért a b-nek is párosnak kell lenni. Vizsgáljuk ezt a három esetet.

I. Ha $b=2$, akkor $ac=1$. Ekkor $a=1$, $c=1$ adódik. Az $x^2-2x+1=0$ egyenletnek két azonos egész gyöke van, így ez egy jó számhármas.

II. Ha $b=4$, akkor $ac=4$. Ekkor a-ra és c-re három pár adódik:

i) $a=1$, $c=4$. Az $x^2-4x+4=0$ egyenletnek két azonos egész gyöke van, így ez egy jó számhármas.

ii) $a=2$, $c=2$. Az $2x^2-4x+2=0$ egyenletnek két azonos egész gyöke van, így ez is egy jó számhármas.

iii) $a=4$, $c=1$. Az $4x^2-4x+1=0$ egyenletnek nem egészek a gyökei, így ez nem jó számhármas.

III. Ha $b=6$, akkor $ac=9$. Ekkor a-ra és c-re három pár adódik:

i) $a=1$, $c=9$. Ebből nem kapunk megoldást, mivel $c=9$-et nem dobhatunk.

ii) $a=3$, $c=3$. Az $3x^2-6x+3=0$ egyenletnek két azonos egész gyöke van, így ez egy jó számhármas.

iii) $a=9$, $c=1$. Az $9x^2-6x+1=0$ egyenletnek nem egészek a gyökei, így ez nem jó számhármas.

Összesen 4 megfelelő számhármas van. Az összes esetek száma, a három különböző kockával dobva: $6^3=216$.

A keresett valószínűség: $P=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$.

c) Ha van az $x^3-6x^2+(a+b)x-c=0$ egyenletnek pozitív egész gyöke, akkor az csak a c pozitív osztója lehet. Mivel c lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, így csak a $c=4$ és a $c=6$ a lehetséges értékek, hiszen ezekben az esetekben van három különböző pozitív osztó. Ha $c=4$, a 4 osztói nem lehetnek a harmadfokú egyenlet gyökei, tehát csak a $c=6$ a megfelelő.

A keresett harmadfokú egyenlet gyöktényezős alakja: $(x-1)(x-2)(x-3)=0$. Elvégezve a beszorzásokat: $x^3-6x^2+11x-6=0$.

Mivel $a+b=11$, így $a=5$, $b=6$ vagy $a=6$, $b=5$. Azaz a kedvező esetek száma 2. Az összes esetek száma, a három különböző kockával dobva: $6^3=216$.

A keresett valószínűség: $P=\frac{2}{216}=\frac{1}{108}$.

6. *Adott három függvény a hozzárendelési szabályával a* $[0;2]$ *intervallumon:*

$$f(x)=x^4-3x^2+3,$$
$$g(x)=2|x-1|+1,$$
$$h(x)=2\sin x.$$

Tekintsük azokat a síkidomokat, amelyeket az y tengely, az x tengely, az $x=2$ egyenletű egyenes, valamint az adott függvény grafikonja határol. Határozzuk meg a három síkidom területét. (*16 pont*)

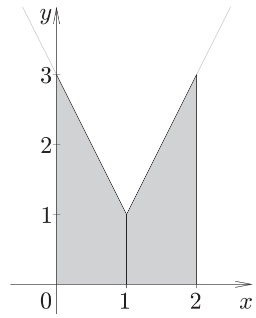
Megoldás. Az

$$x^4-3x^2+3=\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

átalakítás mutatja, hogy az f függvény mindenütt pozitív értékeket vesz fel, vagyis a grafikonja az x tengely fölött található. A kérdéses síkidom területét a következő határozott integrállal számolhatjuk ki:

$$V_1=\int\limits_0^2\left(x^4-3x^2+3\right)dx=\left[\frac{x^5}{5}-x^3+3x\right]_0^2=\frac{2^5}{5}-2^3+3\cdot 2=\frac{22}{5}.$$

A $g(x)=2|x-1|+1$ függvény képét az $|x|$ transzformálásával megkaphatjuk. A kapott síkidomot a függőleges szimmetriatengelye két egybevágó trapézra vágja.



A kérdéses síkidom területét a két egybevágó trapéz területe adja:

$$V_2 = 2 \cdot \frac{(3+1)\cdot 1}{2} = 4.$$

A kijelölt intervallumon a h függvény nem vesz fel negatív értékeket. A kérdéses síkidom területét a következő határozott integrállal határozhatjuk meg:

$$V_3 = \int_0^2 2\sin x\, dx = [-2\cos x]_0^2 = -2\cos 2 + 2\cos 0 \approx 2{,}83.$$

7. *Egy a élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát (tetraédert), amelynek mindhárom oldaléle a kockaélek egy b hosszúságú darabja lesz ($2b < a$). A megmaradt test térfogata $\frac{47}{48}a^3$.*

a) Hányadrésze a b hosszúságú szakasz az a élnek?

b) Adjuk meg a maradék test felszínét a-val, ha a b harmada az a élnek. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Egy levágott tetraéder alaplapja egy b befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, így területe: $T = \frac{b^2}{2}$. Mivel a tetraéder magassága is b, így a térfogata:

$$V = \frac{T\cdot b}{3} = \frac{\frac{b^2}{2}\cdot b}{3} = \frac{b^3}{6}.$$

Az a^3 térfogatú kockából 8 db egybevágó tetraédert vágunk le, ezért a maradék test térfogata:

$$a^3 - 8\cdot\frac{b^3}{6} = a^3 - \frac{4b^3}{3}.$$

A feladat szövege szerint:

$$a^3 - \frac{4b^3}{3} = \frac{47}{48}a^3, \qquad \frac{1}{48}a^3 = \frac{4}{3}b^3, \qquad \frac{b^3}{a^3} = \frac{1}{64}, \qquad \frac{b}{a} = \frac{1}{4}.$$

Vagyis a b az a élnek a negyede.

b) Ebben az esetben a b harmada az a élnek: $b = \frac{a}{3}$. A vágás során a kocka minden lapjából levágunk négy darab b befogójú, azaz $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. Emiatt a kocka $6a^2$ felszíne 24 ilyen háromszög T_1 területével csökken:

$$24\cdot T_1 = 24\cdot\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} = \frac{4a^2}{3}.$$

A vágásokkal viszont új felületek keletkeznek. Nyolc szabályos háromszöget kapunk a sarkoknál. A szabályos háromszögek oldala azonos lesz az $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögek átfogójával: $\frac{a}{3}\cdot\sqrt{2}$. Alkalmazva, hogy az x oldalhosszúságú szabályos háromszög területe $\frac{x^2\cdot\sqrt{3}}{4}$:

$$8T_2 = 8\cdot\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\cdot 4\sqrt{3}}{9}.$$

Az eddig kapott részeredményekkel felírható a maradék test felszíne:

$$A = 6a^2 - 24T_1 + 8T_2 = 6a^2 - \frac{4a^2}{3} + \frac{a^2\cdot 4\sqrt{3}}{9} = \frac{54a^2 - 12a^2 + 4\sqrt{3}\cdot a^2}{9} =$$

$$= \frac{42+4\sqrt{3}}{9}\cdot a^2 \approx 5{,}44a^2.$$

8. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt{\left(17-12\sqrt{2}\right)^x}+\sqrt{\left(17+12\sqrt{2}\right)^x}=\frac{10}{3}. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. Mivel $\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=17-12\sqrt{2}$ és $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}$, ezért az egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2x}}+\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2x}}=\frac{10}{3},$$

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\frac{10}{3}.$$

Mivel $\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)=1$, ezért az egyenlet bal oldalán szereplő két tag egymás reciproka. Legyen $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=a$, ekkor

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=\frac{1}{a}.$$

Az $\dfrac{1}{a}+a=\dfrac{10}{3}$ egyenletet kell megoldanunk, amit $3a$-val szorozva és rendezve kapjuk, hogy:

$$3a^2-10a+3=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei: $a_1=3$, $a_2=\dfrac{1}{3}$.

A $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=3$ egyenletből kapjuk, hogy $x=\log_{3+2\sqrt{2}}3\approx 0{,}623$.

A $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\dfrac{1}{3}$ egyenletből kapjuk, hogy $x=\log_{3+2\sqrt{2}}\dfrac{1}{3}=-0{,}623$.

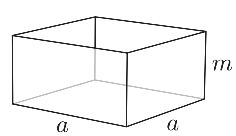
Mindkét szám gyöke az eredeti egyenletnek.

9. *Egy fedőlap nélküli, négyzet alapú láda felülete* $5\ \mathrm{m}^2$*. Mekkora lehet a maximális térfogata a ládának? Adjuk meg ennek a maximális térfogatú ládának a méreteit is (a határoló lapok vastagságát vegyük nullának).* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen a láda alaplapjának éle a, a magassága m hosszúságú. Ezekkel az élhosszakkal a láda felszíne: $A=a^2+4am=5$, a láda térfogata: $V=a^2m$.

Az első összefüggésből kifejezhetjük m-et:

$$m=\frac{5-a^2}{4a}.$$



Ezt visszahelyettesítjük a térfogatképletbe. A láda térfogata láthatóan a függvényében megadható:

$$V(a)=a^2\cdot\frac{5-a^2}{4a}=\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a^3.$$

A $V(a)$ függvény maximumhelyét és maximumértékét keressük. Deriváljuk a függvényt:

$$V'(a)=\left(\frac{5}{4}a-\frac{1}{4}a^3\right)'=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}a^2.$$

A derivált zérushelyei: $a_1=-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$, $a_2=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. A negatív gyök a feladatban nem jöhet szóba (az a távolságot jelöl), így csak az $a=\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ lehet.

Tudjuk, hogy egy függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla. Meg kell vizsgálnunk, hogy a kapott helyen van-e szélsőértéke a $V(a)$ függvénynek, és hogy az maximum-e. A részleteket a következő táblázatban láthatjuk:

a	$0<a<\sqrt{\frac{5}{3}}$	$a=\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{3}}<a$
$V'(a)$	$+$	0	$-$
$V(a)$	$\nearrow$	maximum	$\searrow$

Vagyis az $a = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1{,}29$ valóban maximumhelye a függvénynek. Ennek ismeretében az m is meghatározható:

$$m = \frac{5 - a^2}{4a} = \frac{5 - \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}{4 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{\frac{10}{3}}{4 \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} \approx 0{,}65.$$

Vagyis a láda alsó lapja (századpontossággal) egy 1,29 m oldalhosszúságú négyzet, a magassága pedig ennek az oldalhosszúságnak a fele, kb. 0,65 m.

Ezek ismeretében a maximális térfogatot is meg tudjuk adni:

$$V = a^2 m = 1{,}29^2 \cdot 0{,}65 \approx 1{,}08 \ \left(\mathrm{m}^3\right).$$