I. rész

1. Számítsuk ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét:

$$a=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}},$$
$$b=\left(0{,}2^{-1}\cdot 3125^{0{,}4}-\sqrt[3]{64^2}-1\right):27,$$
$$c=-4\cdot\sin\frac{67\pi}{6}\cdot\lg 0{,}01.$$

(*11 pont*)

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{\cos^2 x+4}{\sin^2 x-4}=\frac{-3\cos^2 x+3\sin x-4}{\cos^2 x+3}.$$

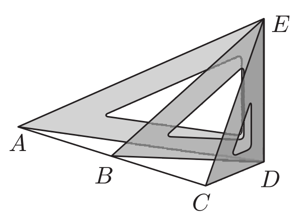
(*12 pont*)

3. Egy háromjegyű szám négyszereséhez 36-ot kell adnunk, hogy a számjegyeiből a fordított sorrendben alkotott háromjegyű számot kapjuk. Melyik volt az eredeti háromjegyű szám? (*14 pont*)

4. Csúcsainak koordinátáival adott egy háromszög: $A(1;2)$, $B(13;2)$, $C(5;10)$. Számítással igazoljuk ebben a háromszögben, hogy az MK szakasz K ponthoz közelebbi harmadoló pontja az ABC háromszög S súlypontja lesz. (M a magasságpontot, K a háromszög köré írt kör középpontját jelöli.) (*14 pont*)

II. rész

5. Az *ábrán* látható építményt három derékszögű vonalzóból úgy raktuk össze, hogy az azonos hosszúságú befogóiknál illeszkedjenek egymáshoz, a további befogók pedig az asztallapon legyenek.



A középső vonalzó egyenlő szárú, az egyik szélsőnek a hosszú, a másiknak a rövid befogója érintkezik az asztallappal. Az ábrán látható A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, és $AB=BC=8$ cm.

a) Adjuk meg az ADE, BDE és CDE derékszögű háromszögek területének arányát.

b) Milyen magasan van az asztallap fölött az E pont? (*16 pont*)

6. Tekintsük az $f(x)=x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonjára illeszkedő, az

$$A_n\big(-n;f(-n)\big),\quad B_n\big(n;f(n)\big),\quad C_n\big(n+1;f(n+1)\big),\quad D_n\big(-n-1;f(-n-1)\big)$$

pontok által meghatározott húrtrapézokat (n pozitív egész számot jelöl). Az $A_nB_nC_nD_n$ körülírt körének sugara legyen r_n.

a) Adjuk meg az $r_1+r_2+r_3$ összeget.

b) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_1^2+r_2^2+\ldots+r_n^2}{n^3}$ határértéket. (*16 pont*)

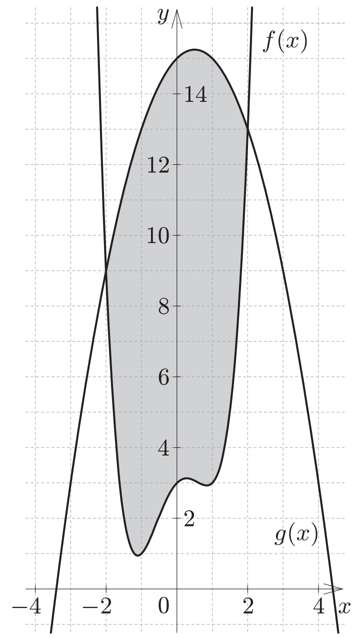
7. Egy terepasztalon az *ábrán* látható folt egy tó alakját mutatja. Ha ezt a síkidomot 1 cm egységű koordinátarendszerbe helyezzük, akkor a határvonalát az

$$f(x)=x^4-2x^2+x+3$$

és a

$$g(x)=-x^2+x+15$$

hozzárendeléssel adott függvények grafikonja adja.



a) Milyen messze van egymástól a grafikonok metszéspontja?
b) Mekkora a folt területe? (*16 pont*)

8. Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az

$$\begin{cases} xy + x + y + 2 = 0, \\ x - p = y(px + 1) \end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy valós $(x;y)$ számpár legyen a megoldása. (*16 pont*)

9. Az egységsugarú gömbbe olyan kúpot írunk, amelyben a tengely és az alkotó szöge α. Adjuk meg a kúp felszínét és térfogatát $\sin\alpha$ függvényében. (*16 pont*)