Megoldásvázlatok a 2014/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Péternek volt 84 000 Ft-ja, amit édesapja p%-kal megnövelt. Ezt követően Péter a pénzének $(p-5)$%-áért könyveket vásárolt. Ekkor annyi pénze maradt, mint amennyi eredetileg volt. Mennyibe kerültek a könyvek?* (*11 pont*)

Megoldás. Ha p%-kal megnövekedett a pénze, akkor $84\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)$ forintja lett. Ezt követően ennek az összegnek elköltötte a $(p-5)$%-át. Ekkor

$$84\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p-5}{100}\right)$$

forintja maradt, ami a szöveg szerint pontosan 84 000 Ft. Ezt felírhatjuk egyenletként:

$$84\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p-5}{100}\right)=84\,000,$$
$$\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p-5}{100}\right)=1.$$

Végezzük el a beszorzást, majd rendezzük az egyenletet:

$$1+\frac{p}{100}-\frac{p-5}{100}-\frac{p(p-5)}{10\,000}=1,$$
$$100p-100(p-5)-p(p-5)=0,$$
$$p^2-5p-500=0.$$

A megoldóképlet segítségével kapjuk a gyököket:

$$p_{1;2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot(-500)}}{2}=\frac{5\pm 45}{2},$$
$$p_1=25,\quad p_2=-20.$$

A feladat szövege szerint csak az első gyök jöhet szóba. Édesapja 25%-kal növelte a pénzét, azaz 21 000 Ft-tal. Ezt költötte el könyvekre.

Vagyis a könyvek 21 000 Ft-ba kerültek.

2. *Milyen háromszög oldalaira teljesül az $a^4+2b^2c^2=b^4+c^4$ összefüggés?*

(*12 pont*)

Megoldás. Rendezzük az összefüggést 0-ra:

$$a^4-b^4+2b^2c^2-c^4=0,$$
$$a^4-\left(b^4-2b^2c^2+c^4\right)=0.$$

A zárójelben lévő háromtagú kifejezés teljes négyzet:

$$a^4-\left(b^2-c^2\right)^2=0.$$

Ezt írhatjuk szorzatalakban is:

$$\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)=0.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha $a^2+c^2=b^2$ vagy $a^2+b^2=c^2$.

Vagyis a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint a háromszög biztosan derékszögű. (Az is kiderült, hogy vagy a b, vagy a c oldallal szemben van a háromszög derékszöge.)

3. *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:*

$$\begin{cases}\dfrac{14}{x+3y-5}-\dfrac{15}{x+y+2}=4,\\[2mm] \dfrac{7}{x+3y}+\dfrac{9}{x+y}=4.\end{cases}$$

(*16 pont*)

Megoldás. Egyik nevező sem lehet 0, ezért $x + 3y \neq 5$, $x + y \neq -2$, $x + 3y \neq 0$, $x + y \neq 0$.

Vezessük be a következő új ismeretleneket: $a = x + y$, $b = x + 3y$. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{14}{b-5} - \dfrac{15}{a+2} = 4, \\ \dfrac{7}{b} + \dfrac{9}{a} = 4. \end{cases}$$

Az első egyenletet $(a+2)(b-5)$-tel, a másodikat ab-vel szorozzuk:

$$\begin{cases} 14(a+2) - 15(b-5) = 4(a+2)(b-5), \\ 7a + 9b = 4ab. \end{cases}$$

A műveletek elvégzése és a rendezés után a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} 34a - 23b + 143 - 4ab = 0, \\ 7a + 9b = 4ab. \end{cases}$$

Az első egyenletben a $4ab$ helyettesíthető $(7a + 9b)$-vel:

$$34a - 23b + 143 - (7a + 9b) = 0,$$

$$27a - 32b + 143 = 0,$$

$$a = \frac{32b - 143}{27}.$$

Ezt visszaírhatjuk az egyenletrendszer második egyenletének rendezett változatába:

$$7 \cdot \frac{32b - 143}{27} + 9b = 4 \cdot \frac{32b - 143}{27} \cdot b,$$

amit 27-tel szorozhatunk, majd a műveletek elvégzése után a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$128b^2 - 1039b + 1001 = 0.$$

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$b_{1;2} = \frac{1039 \pm \sqrt{1039^2 - 4 \cdot 128 \cdot 1001}}{2 \cdot 128} = \frac{1039 \pm 753}{256},$$

$$b_1 = 7, \quad b_2 = \frac{143}{128}.$$

A feladat feltételei alapján b-nek is egésznek kell lenni, így b_2 nem jöhet szóba. Behelyettesítéssel kapjuk:

$$a_1 = \frac{32 \cdot b_1 - 143}{27} = \frac{32 \cdot 7 - 143}{27} = 3.$$

Meghatároztuk az új ismeretlenek értékét, ezért most már felírhatjuk, hogy

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 3y = 7. \end{cases}$$

Ennek megoldása: $x = 1$, $y = 2$.

Ez a számpár minden feltételnek eleget tesz, így ez az eredeti egyenletrendszer megoldása.

4. *Egy kiadó honlapján az olvasók szavazhattak arra, hogy szerintük mi volt* 2013 *legjellemzőbb szava. A játékosoknak három szót kellett ajánlani. László nagyon korán bekapcsolódott a játékba, és ekkor mindhárom szava felkerült a tízes listára. Az ekkori állást a következő táblázat mutatja:*

A szó	szavazatok száma
Rezsicsökkentés	36
Okostelefon	25
Táblagép	24
Életpályamodell	21
Kedvesem	16
Nemzeti dohánybolt	15
Jobban teljesít	14
Devizahitel	11
Összefogás	10
Remény	8

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy kitaláljuk az általa ajánlott három szót, ha tudjuk, hogy ekkor pontosan egy szava szerepelt a legjobb három között?

b) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán?

c) Hányféle olyan ajánlás képzelhető el, amelynek mindhárom szava szerepel a listán, de nincsenek szomszédosak közöttük? *(14 pont)*

Megoldás. *a)* Az egyik szava a szöveg feltételei szerint a rezsicsökkentés, az okostelefon vagy a táblagép volt. A további hét szóból még valamelyik kettőt ajánlotta László. Az ilyen szópárok száma:

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21.$$

Vagyis az összes esetek száma: $3 \cdot 21 = 63$.

Ebből csak egy a kedvező, így a valószínűség már meghatározható a kedvező esetek és az összes esetek számának hányadosaként.

A keresett valószínűség: $\dfrac{1}{63}$.

b) Az ajánlásban az ajánlott szavak sorrendje nem számít. A tíz szóból bármelyik három kiválasztása megfelelő lesz. Vagyis a megfelelő szóhármasok száma:

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

c) Számoljuk össze azokat az eseteket, amikor van szomszédos az ajánlott három szó között. A szavakat jelöljük röviden a 0, 1, 2, 3, ..., 9 számjegyekkel.

Lehet, hogy mindhárom egymás mellett van: 012, 123, ..., 789. Ez 8 eset.

Lehet, hogy pontosan kettő van egymás mellett. Ekkor könnyen megszámolhatjuk, hogy hány különböző módon tudjuk hozzájuk választani a harmadikat. A két szomszédoshoz képest a harmadik lehet, hogy a listán kisebb, lehet, hogy nagyobb sorszámmal szerepelt.

A 01 esetén $0 + 7$;
az 12 esetén $0 + 6$;
a 23 esetén $1 + 5$;
a 34 esetén $2 + 4$;
a 45 esetén $3 + 3$;
az 56 esetén $4 + 2$;
a 67 esetén $5 + 1$;
a 78 esetén $6 + 0$;
a 89 esetén $7 + 0$ lehetőség adódik.

Így 56 esetet kaptunk.

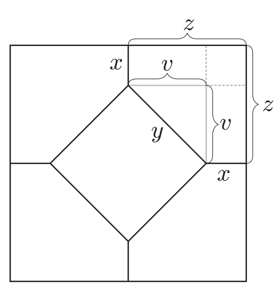
Összesen $8 + 56 = 64$ olyan szóhármas van, amelyek tartalmaznak szomszédos szavakat is. Mivel összesen 120-féleképpen lehet szóhármasokat kiválasztani a 10 szóból, azért a feltételeknek $120 - 64 = 56$ eset felel meg.

II. rész

5. *Egy* 120 cm-*szer* 120 cm-*es ablakba beilleszthető üvegtáblát az* ábrán *látható módon szeretnénk megosztani. (A négy ötszög egybevágó, az ötödik síkidom négyzet.)*

a) Milyen határok között mozog ennek az osztóvonalnak a hossza?

b) Adjuk meg az osztóvonal hosszát centiméter pontossággal, ha az ablak belsejében kialakuló minta öt egyenlő területű részből áll. *(16 pont)*



Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit.

a) Mivel $v = z - x = 60 - x$ (hiszen z az ablak szélességének a fele), azért $y = \sqrt{2}(60 - x)$. Felhasználtuk az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója és átfogója közötti kapcsolatot.

Az osztóvonal hossza $4(x+y)$, ezt most már kifejezhetjük csak x függvényeként:

$$f(x) = 4\big(x + \sqrt{2}(60 - x)\big) = 4\big(1 - \sqrt{2}\,\big)x + 240\sqrt{2}\,.$$

$f(x)$ szigorúan monoton csökkenő elsőfokú függvény, ahol $x \in \,]0; 60[$.

Mivel $f(0) = 240\sqrt{2}$, és $f(60) = 240$, azért az osztóvonal hossza 240 cm-nél nagyobb, és $240\sqrt{2}$ cm-nél kisebb lehet.

b) A nagy négyzet területe: $T = 4z^2$. A belső kis négyzet területe a nagy négyzet ötödével egyenlő: $t = y^2 = \dfrac{4z^2}{5}$. Ebből kapjuk: $y = \dfrac{2z}{\sqrt{5}}$.

Mivel y az átfogója a v befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, azért:

$$v = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2z}{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{2z}{\sqrt{10}} = \frac{z\sqrt{10}}{5}.$$

Ezeket felhasználva:

$$x = z - v = z - \frac{z\sqrt{10}}{5} = \frac{5 - \sqrt{10}}{5}z.$$

Vagyis az osztóvonal hossza:

$$4(x+y) = 4\left(\frac{5-\sqrt{10}}{5}z + \frac{2}{\sqrt{5}}z\right) = \frac{4\big(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5}\,\big)}{5}z.$$

Tudjuk, hogy $z = 60$ cm. Ezt behelyettesítve kapjuk a vonal hosszát, amit centiméterre kell kerekítenünk a feladat kérése szerint:

$$4(x+y) = \frac{4\big(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5}\,\big)}{5} \cdot 60 = 48\big(5 - \sqrt{10} + 2\sqrt{5}\,\big) \approx 303 \text{ (cm)}.$$

6. *Egy mértani sorozat első és harmadik elemének összege* 50, *a második és negyedik elemének összege pedig* 350. *A sorozat minden eleme pozitív egész szám, továbbá az első* n *elem összege osztható* 5*-tel.*

a) *Adjuk meg a sorozat első négy elemét.*

b) *Határozzuk meg* n *értékét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A mértani sorozat tagjai: a, aq, aq^2, aq^3. A feladat szövege szerint: $a + aq^2 = 50$ és $aq + aq^3 = 350$. Az egyenletek bal oldalán kiemeléssel szorzatokat alakítunk ki:

$$a\big(1 + q^2\big) = 50,$$
$$aq\big(1 + q^2\big) = 350.$$

Az első egyenlet bal oldalát q-val, a jobb oldalát 7-tel szorozva a második egyenletet kapjuk, ezért $q = 7$, és ehhez $a = 1$ adódik. (Így valóban a sorozat minden tagja pozitív egész lesz.)

Vagyis a sorozat első négy tagja: 1, 7, 49, 343.

b) Folytassuk a sorozat tagjainak felírását: 1, 7, 49, 343, 2401, … . A végződések periodikusan ismétlődnek négyesével: 1, 7, 9, 3, 1, … . n tag esetén az összeg utolsó számjegyei a következők: 1, 8, 7, 0, 1, … .

Mivel ezek is periodikusak, és minden negyedik végződés 0, (5-ös végződés nincs), azért minden negyedik sorszám megfelelő lesz.

Ez azt jelenti, hogy 4-gyel osztható n esetén lesz a kérdéses sorozat első n tagjának összege 5-tel osztható.

7. *Adott az* ABC *egyenlő szárú háromszög két szárának egyenlete:*

$$a\colon 7x - 4y = -24, \qquad b\colon x - 8y = 4,$$

továbbá a harmadik oldalára illeszkedő $P(10; 4)$ *pont.*

a) *Adjuk meg a szárak* C *metszéspontját.*

b) *Írjuk fel a* C *csúcsra illeszkedő belső szögfelező egyenletét.*

c) *Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A C csúcs koordinátáit a két egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása adja:

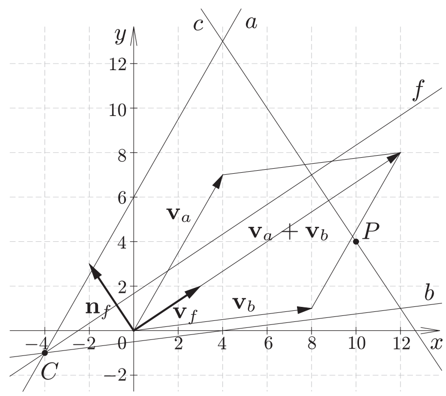
$$\begin{cases} 7x - 4y = -24, \\ x - 8y = 4. \end{cases}$$

A második egyenletből $x = 8y + 4$, ezt helyettesítsük be az első egyenletbe:

$$\begin{aligned} 7(8y+4) - 4y &= -24, \\ y &= -1. \\ x = 8(-1) + 4 &= -4. \end{aligned}$$

Vagyis a szárak metszéspontja: $C(-4; -1)$.

b) Az a és b egyenesek a C pontban metszik egymást, a C-n át két szögfelező is húzható, de nekünk a feladat feltételei szerint csak annak a tartománynak a szögfelezője kell, amelyikben benne van a $P(10; 4)$ pont.



Határozzuk meg ennek az f szögfelezőnek az irányvektorát. Az egyenes irányvektoros egyenletének ismeretében az a egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_a(4; 7)$, a b egyenes irányvektora: $\mathbf{v}_b(8; 1)$.

$\mathbf{v}_a$ és $\mathbf{v}_b$ egyenlő hosszúságúak:

$$|\mathbf{v}_a| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}\,,$$
$$|\mathbf{v}_b| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}\,.$$

Ha két egyenlő hosszú vektort összeadunk, akkor a paralelogramma szabályra gondolva a paralelogramma rombusz lesz. A rombusz átlója pedig szögfelező. Így most az f belső szögfelező egyik irányvektora: $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$.

A koordinátákkal elvégezve a megfelelő műveleteket:

$$\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b = (4+8)\mathbf{i} + (7+1)\mathbf{j} = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j},$$

ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a szokásos egységvektorokat jelenti: $\mathbf{i}(1; 0)$, $\mathbf{j}(0; 1)$.

A $\mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b$ vektornak a negyedével fogunk tovább számolni. Ez a vektor az f egyik irányvektora: $\mathbf{v}_f(3; 2)$. A megfelelő forgatással megkapjuk az $\mathbf{n}_f(2; -3)$ normálvektort is. Az $\mathbf{n}_f(2; -3)$ normálvektorral felírható a $C(-4; -1)$ csúcsra illeszkedő f szögfelező egyenlete:

$$f\colon 2x - 3y = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -5.$$

c) Mivel a háromszög egyenlő szárú, azért az a és b egyenesek szögfelezője merőleges lesz a harmadik oldalegyenesre, vagyis a szögfelező irányvektora a keresett c oldalegyenes normálvektora lesz: $\mathbf{v}_f = \mathbf{n}_c(3; 2)$. Az $\mathbf{n}_c(3; 2)$ normálvektorral felírható a $P(10; 4)$ pontra illeszkedő c egyenes egyenlete:

$$c\colon 3x + 2y = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 4 = 38.$$

8. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\left(2 - 4\sqrt{3}\right)\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \left(2 - 2\sqrt{3}\right)\sin^2 x = 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

(16 pont)

Megoldás. Használjuk a függvénytáblázat trigonometriai azonosságait. Tudjuk, hogy $2\sin x\cos x = \sin 2x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ és $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. A két utóbbi különbségeként és összegeként a következő azonosságokat kapjuk:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad \text{illetve} \quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x.$$

Ezek felhasználásával az egyenletet így írhatjuk:

$$\begin{aligned} \left(1 - 2\sqrt{3}\right)(1 + \cos 2x) + \sin 2x + \left(1 - \sqrt{3}\right)(1 - \cos 2x) &= 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}\,, \\ 1 - 2\sqrt{3} + \cos 2x - 2\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 1 - \sqrt{3} - \cos 2x + \sqrt{3}\cos 2x &= 2 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}\,, \\ \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x &= \sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Osztunk 2-vel, hogy alkalmazható legyen a függvénytáblázat

$$\sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

azonossága:

$$\frac{1}{2}\,\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ekkor az $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyére rendre a $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{4}$ értékeket írjuk, így az $\alpha = 2x$, a $\beta = \frac{\pi}{3}$ lesz:

$$\sin 2x\,\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\,\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{4},$$
$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.$$

I. $\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4} = 2k_1\pi$, ahol $k_1 \in \mathbb{Z}$: $\quad x_1 = -\frac{\pi}{24} + k_1\pi.$

II. $\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4} = \pi + 2k_2\pi$, ahol $k_2 \in \mathbb{Z}$: $\quad x_2 = \frac{5\pi}{24} + k_2\pi.$

9. *Ha a $[-3;3]$ intervallumon értelmezett $f(x) = 2|x+1| + 2|x-1|$ és $g(x) = x^2$ hozzárendelésű függvények görbéjét az y tengely körül megforgatjuk, akkor két pohár belső felületét kapjuk. A koordinátarendszer egysége pontosan 1 cm. Adjuk meg a két pohár térfogatának különbségét.*

A számolás során – ha szükséges – felhasználhatjuk, hogy az $[a;b]$-n értelmezett $f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott test térfogata:

$$\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(*16 pont*)

Megoldás. Ábrázoljuk az első poharat meghatározó $f(x) = 2|x+1| + 2|x-1|$ hozzárendelésű függvényt a $[-3;3]$ intervallumon.

Ha $x \in [-3;-1[$, akkor $f(x) = -2x - 2 - 2x + 2 = -4x$.

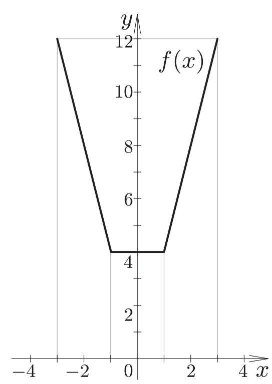
Ha $x \in [-1;1]$, akkor $f(x) = 2x + 2 - 2x + 2 = 4$.

Ha $x \in]1;3]$, akkor $f(x) = 2x + 2 + 2x - 2 = 4x$.

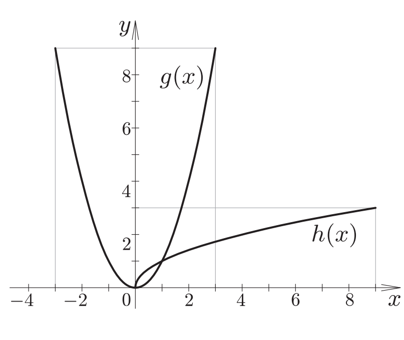
Ezek alapján az *1. ábra* mutatja az $f(x)$ grafikonját.

A grafikon y tengely körüli megforgatásával csonkakúpot kapunk. Alapköreinek sugara: $r = 1$, $R = 3$, magassága: $m = 8$. Használjuk a csonkakúp térfogatképletét:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}m\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{\pi}{3}\cdot 8\cdot(9+3+1) = \frac{104\pi}{3} \approx 108{,}9\ (\text{cm}^3).$$



1. ábra



2. ábra

A másik pohár (*2. ábra*) is forgástest alakú. Ha az x tengely körül megforgatjuk a $[0;9]$ intervallumon a $h(x)=\sqrt{x}$ függvény görbéjét, akkor is ezt a testet kapjuk.

Használhatjuk a feladat szövegében megadott térfogatkiszámítási módot. Ennek a testnek a térfogata:

$$V_2=\pi\int\limits_0^9\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int\limits_0^9 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^9=\frac{81\pi}{2}\approx 127{,}2\ (\mathrm{cm}^3).$$

Vagyis a második pohár térfogata 18,3 cm^3-rel nagyobb, mint az elsőé.