

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{2x^2 - 12x + 107}{x^3 - 7x - 6} = \frac{x^2 + 8x + 16}{(x - 3)(x^2 + 3x + 2)}. \quad (11 \text{ pont})$$

2. A lottósorsolás előtt a sorsoló gömbben elhelyeztek 90 golyót 1-től 90-ig megszámozva.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre két golyót kihúzva egy köbszám két egész szomszédja lesz a ki-sorsolt két szám?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszerre öt golyót kihúzva a húzott számok számjegyei mind párosak lesznek? (12 pont)

3. a) Az $x^2 - (4k - 2)x + y^2 - (2k + 4)y + c = 0$ köregyenletben határozzuk meg a k és a c paraméter értékét úgy, hogy a kör érintse mindkét koordinátatengelyt.

b) Az $x^2 - 10x + y^2 - 10y + 25 = 0$ egyenlettel megadott körvonalra illeszkedik az ABC szabályos háromszög minden csúcsa. Adjuk meg a háromszög hiányzó csúcsainak koordinátáit, ha $A(5; 10)$. (14 pont)

4. a) Hány olyan négyjegyű szám van, amely osztható 9-cel és 3-ra végződik?

b) Egy számtani sorozat első 33 páratlan sorszámú elemének összege A , az első 32 páros sorszámú elemének összege B , az első 32 páratlan sorszámú elemének összege pedig C . Tudjuk, hogy $A - B = 323$ és $B - C = 320$. Mennyi a sorozat 50. eleme? (14 pont)

II. rész

5. a) Két szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a , a fehérrel dobott pedig legyen b . Mekkora a valószínűsége annak, hogy két egész gyöke lesz az $ax^2 + bx = 0$ egyenletnek?

b) Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a , a fehérrel dobott legyen b , a zölddel dobott pedig legyen c . Mekkora a valószínűsége annak, hogy két azonos, egész gyöke lesz az $ax^2 - bx + c = 0$ egyenletnek?

c) Három szabályos dobókockával dobunk, a pirossal dobott érték legyen a , a fehérrel dobott legyen b , a zölddel dobott pedig legyen c . Mekkora a valószínűsége annak, hogy három különböző, pozitív egész gyöke lesz az $x^3 - 6x^2 + (a + b)x - c = 0$ egyenletnek? (16 pont)

6. Adott három függvény a hozzárendelési szabályával a $[0; 2]$ intervallumon:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 3,$$

$$g(x) = 2|x - 1| + 1,$$

$$h(x) = 2 \sin x.$$

Tekintsük azokat a síkidomokat, amelyeket az y tengely, az x tengely, az $x = 2$ egyenletű egyenes, valamint az adott függvény grafikonja határol. Határozzuk meg a három síkidom területét. (16 pont)

7. Egy a élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát (tetraédert), amelynek mindhárom oldaléle a kockaélek egy b hosszúságú darabja lesz ($2b < a$). A megmaradt test térfogata $\frac{47}{48}a^3$.

a) Hányadrésze a b hosszúságú szakasz az a élnek?

b) Adjuk meg a maradék test felszínét a -val, ha a b harmada az a élnek? (16 pont)

8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{(17 - 12\sqrt{2})^x} + \sqrt{(17 + 12\sqrt{2})^x} = \frac{10}{3}. \quad (16 \text{ pont})$$

9. Egy fedőlap nélküli, négyzet alapú láda felülete 5 m^2 . Mekkora lehet a maximális térfogata a ládának? Adjuk meg ennek a maximális térfogatú ládának a méreteit is (a határoló lapok vastagságát vegyük nullának). (16 pont)