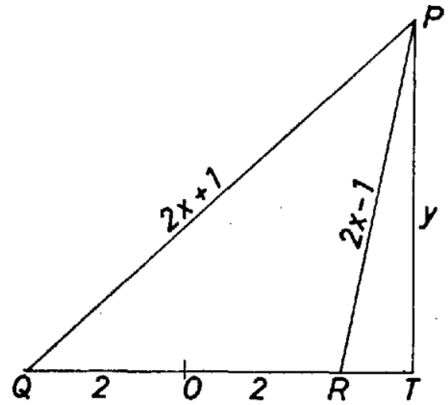
Jelöljük a 4 egységnyi oldal végpontjait Q-val, R-rel, felezőpontját O-val, a harmadik csúcsot P-vel, P-nek QR-en levő vetületét T-vel. Feltehetjük, hogy T-hez Q, R közül R van közelebb, akkor

(1) $$PR^2 = y^2 + (x-2)^2,$$

(2) $$PQ^2 = y^2 + (x+2)^2,$$

ahol $x = OT$, $y = PT$.



A második egyenletből kivonva az elsőt, kapjuk, hogy

$$2(PQ + PR) = 8x,$$

hiszen $PQ - PR = 2$. Így a két összefüggés összege alapján

$$8x^2 + 2 = 2y^2 + 2x^2 + 8,$$

hiszen $2\,PR^2 + 2\,PQ^2 = (PR + PQ)^2 + (PR - PQ)^2$. Olyan x, y számpárt keresünk tehát, amelyekre

(3) $$3x^2 = y^2 + 3$$

teljesül: ha y egész, akkor PQR területe is egész, hiszen ez $2y$, és ugyancsak egész a PQ, PR oldalak hossza, hiszen (1) és (2) alapján

$$PR^2 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2,$$
$$PQ^2 = 4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2.$$

Ha x, y egészek, akkor (3) szerint y osztható 3-mal. Írjunk tehát y helyére $3z$-t, így az

(4) $$(x - z\sqrt{3})(x + z\sqrt{3}) = 1$$

egyenletet kapjuk. Ez pozitív x, z mellett csak úgy teljesülhet, ha a bal oldalon mindkét tényező pozitív. Négyzetre emelve az egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\left[(x^2 + 3z^2) - 2xz\sqrt{3}\right]\left[(x^2 + 3z^2) + 2\,xz\,\sqrt{3}\right] = 1,$$

ha tehát az x, z párra teljesül (4), a

$$X = x^2 + 3z^2, \qquad Z = 2xz$$

párra is teljesül, és ha x, z pozitív egészek, az X, Z pár tagjai is azok. Elegendő tehát egyetlen megoldást találni, ebből végtelen sok állítható elő, hiszen $x < X$ miatt a fenti eljárással kapott gyökpárok különbözőek. Megfelel a feladat követelményeinek a 3, 4, 5 oldalú háromszög, erre $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. A feladatnak tehát végtelen sok megoldása van.

Megjegyzés. A kapott (4) egyenlet ún. Pell–féle egyenlet, ezekről nemrég *Fried Ervin* írt cikksorozatot lapunkban: A Pell–féle egyenletek megoldása I-VI. rész, KML 53. kötet 49–52. oldal, 54. kötet 1–3. és 193–197. oldal, 55. kötet 55–58. oldal, 56. kötet 1–4. és 193–197. oldal.