I. rész

1. *a) Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő kifejezés értékét:*

$$\frac{2010201120122010\cdot 2010201120122016}{2010201120122015}:\left(1-\frac{5}{2010201120122015}\right).$$

b) Milyen k valós számok esetén van a $kx^2-3x^2-k(2x-6)=0$ egyenletnek pozitív valós gyöke? (*11 pont*)

Megoldás. *a)* Legyen $a=2\,010\,201\,120\,122\,013$. Ekkor a kifejezés így írható:

$$\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}:\left(1-\frac{5}{a+2}\right)=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}:\frac{a+2-5}{a+2}=$$
$$=\frac{(a-3)\cdot(a+3)}{a+2}\cdot\frac{a+2}{a-3}=a+3.$$

Vagyis a kifejezés értéke: 2 010 201 120 122 016.

b) Átalakítva az egyenletet, kapjuk: $(k-3)x^2-2kx+6k=0$.

I. Ha $k=3$, akkor az egyenlet elsőfokú, megoldása $x=3$, ami pozitív.

II. Ha $k\neq 3$, akkor az egyenlet másodfokú.

II.1. Két különböző valós gyöke van az egyenletnek, ha a diszkriminánsa pozitív:

$$\begin{aligned}(-2k)^2-4\cdot(k-3)\cdot 6k&>0,\\ 4k^2-24k^2+72k&>0,\\ -5k^2+18k&>0,\\ k(5k-18)&<0.\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $k\in\left]0;\frac{18}{5}\right[$.

II.1.1. Két pozitív gyöke van az egyenletnek, ha $k\in\left]0;\frac{18}{5}\right[$, és ezen kívül teljesül:

$$x_1x_2=\frac{6k}{k-3}>0\quad\text{és}\quad x_1+x_2=-\frac{-2k}{k-3}>0.$$

Mindkét egyenlőtlenség megoldása a $k\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]3;+\infty\right[$.

Mindent egybevetve az egyenletnek két különböző pozitív gyöke van, ha $k\in\left]3;\frac{18}{5}\right[$.

II.1.2. Egy pozitív és egy negatív valós gyöke van az egyenletnek, ha $k\in\left]0;\frac{18}{5}\right[$ és ezen kívül teljesül:

$$x_1x_2=\frac{6k}{k-3}<0.$$

Mivel az egyenlőtlenség megoldása: $k\in\left]0;3\right[$, adódik, hogy az egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van, ha $k\in\left]0;3\right[$.

II.1.3. Egy pozitív és egy 0 valós gyöke nem lehet az egyenletnek. Ehhez a $k=0$ szükséges feltétel kellene, de ekkor mindkét gyök 0 lenne.

II.2. Két egybeeső valós gyöke van az egyenletnek, ha a diszkriminánsa 0, vagyis:

$$k(5k-18)=0.$$

Ez $k=0$, illetve $k=\frac{18}{5}$ esetén áll fenn.

Ha $k=0$, akkor a $(k-3)x^2-2kx+6k=0$ egyenlet a $-3x^2=0$ alakot ölti. Ekkor a két egybeeső gyök: $x_{1,2}=0$.

Ha $k=\frac{18}{5}$, akkor az egyenlet a

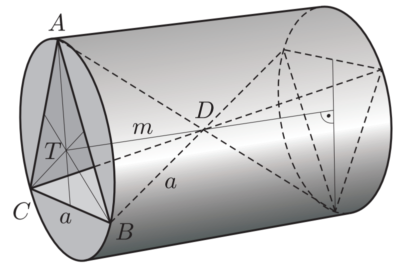
$$\frac{3}{5}x^2-\frac{36}{5}x+\frac{108}{5}=0$$

alakot ölti. Ezt a következő alakra hozhatjuk: $x^2-12x+36=(x-6)^2=0$. Ekkor a két egybeeső gyök: $x_{1,2}=6$.

Összefoglalva: az egyenletnek akkor van pozitív valós gyöke, ha $k\in\left]0;\frac{18}{5}\right]$.

2. *Egy henger alakú rézalkatrészből hiányzik az* ábrán *látható módon két darab* 4 cm *élű szabályos tetraéder alakú rész.*

A gyártó cégtől 65 000 *darab ilyen alkatrészt rendeltek meg. Hány tonna rezet rendeljen a cég, ha a gyártás során fellépő veszteségek miatt a szükséges mennyiségnél* 15%-kal *több rezet kell felhasználniuk?*
(*A réz sűrűsége* 8960 kg/m^3.) (*12 pont*)



Megoldás. Az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC alapháromszögében bármely súlyvonal kétharmad részét számolva a henger alapkörének CT sugarát kapjuk.

$$CT = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

A CTD derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számolható a TD szakasz hossza, amely a tetraéder magassága, és egyben a henger magasságának a fele is:

$$TD = \sqrt{a^2 - CT^2} = \sqrt{16 - \frac{16 \cdot 3}{9}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az $ABCD$ szabályos tetraéder térfogata:

$$V_{ABCD} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot TD}{3} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \approx 7{,}54.$$

A henger térfogata:

$$V_{\text{henger}} = CT^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot TD = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{128}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \pi \approx 109{,}44.$$

A test térfogata:

$$V_{\text{henger}} - 2 \cdot V_{ABCD} = 109{,}44 - 2 \cdot 7{,}54 = 94{,}36\ (\text{cm}^3).$$

65 000 darab ilyen test térfogata: $65\,000 \cdot 94{,}36\ \text{cm}^3 = 6\,133\,400\ \text{cm}^3 = 6{,}1334\ \text{m}^3$. A 15%-os ráhagyással együtt: $6{,}1334\ \text{m}^3 \cdot 1{,}15 = 7{,}05341\ \text{m}^3$. Ennek a térfogatnak megfelelő tömeg:

$$7{,}05341\ \text{m}^3 \cdot 8960\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 63\,198{,}6\ \text{kg} \approx 63{,}2\ \text{t}.$$

Vagyis kb. 63,2 tonna rezet kell rendelnie a cégnek.

3. *a) Az a-val és b-vel prímszámok négyzeteit jelöljük. Mennyi az a és b értéke, ha a $\sqrt{a} - \sqrt{2b}$ és $\sqrt{a} + \sqrt{2b}$ kifejezések egymás reciprokai?*

b) Mutassuk meg, hogy $10 \mid 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017}$.

c) Mutassuk meg, hogy $11 \mid 100^{2014} - 1$. *(14 pont)*

Megoldás. *a)* Ha két kifejezés egymás reciproka, akkor szorzatuk 1, vagyis felírható:

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{2b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{2b}\right) = 1.$$

Alkalmazva az ismert azonosságot kapjuk:

$$a - 2b = 1.$$

Vegyük észre, hogy a páratlan (mivel páros számot vonunk ki belőle és 1-et kapunk), vagyis a egy páratlan prímszám négyzete. Átrendezve az egyenletet, kapjuk: $a - 1 = 2b$. Az egyenlet bal oldala osztható néggyel, hiszen páratlan szám négyzete néggyel osztva 1 maradékot ad. Ebből adódik, hogy $2b$ osztható néggyel, vagyis b osztható kettővel. Prímszám négyzete csak akkor lehet osztható 2-vel, ha az a 2-nek a négyzete.

Vagyis $b = 4$, és ebből adódik, hogy $a = 9$.

b) Tudjuk, hogy a 2^α (ahol α pozitív természetes szám) hatvány utolsó számjegye:

- 2, ha α néggyel osztva 1 maradékot ad;
- 4, ha α néggyel osztva 2 maradékot ad;
- 8, ha α néggyel osztva 3 maradékot ad;
- 6, ha α néggyel osztható.

Ebből adódóan a $2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017}$összegben a tagok utolsó számjegyei meghatározhatók.

hatvány	2^{2014}	2^{2015}	2^{2016}	2^{2017}
végződés	4	8	6	2

A végződések összege: $4+8+6+2=20$. Mivel természetes számok összegének utolsó számjegyét a tagok utolsó számjegyei összegének az utolsó számjegye határozza meg, azért a $2^{2014}+2^{2015}+2^{2016}+2^{2017}$ összeg a tízes számrendszerben 0-ra végződik, tehát osztható 10-zel.

c) Ha a 100^{2014} számot leírnánk, akkor egy darab 1-esre és utána 4028 darab 0-ra lenne szükségünk. Ha ebből a számból kivonunk 1-et, akkor egy olyan számot kapunk, amelyben 4028 darab 9-es szerepel:

$$100^{2014}-1=\underbrace{9999\ldots99}_{4028\text{ db}}.$$

Ha elvégezzük az osztást, akkor látható lesz, hogy ez a 4028 jegyű szám valóban osztható 11-gyel:

$$\underbrace{9999\ldots99}_{4028\text{ db}}:11=\underbrace{90909\ldots909}_{4027\text{ db számjegy}}.$$

Megjegyzés. Használhatjuk a 11-es oszthatósági szabályt is. Könnyű belátni, hogy a szám páratlan helyiértékein lévő számjegyeinek összege (ami 2014 darab 9-es), ugyanannyi, mint a páros helyiértékein lévő számjegyek összege (ami szintén 2014 darab 9-es). Ez azt jelenti, hogy $100^{2014}-1$ osztható 11-gyel.

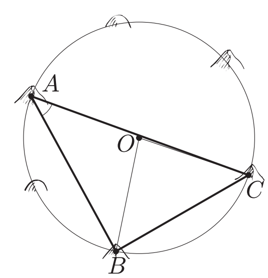
4. *a*) *Egy ősi kultikus helyen több tonnás kőtömbök vannak elhelyezve egy körvonal mentén. Egy régész a következő módon határozta meg a kör sugarát: kiválasztott egy A kőtömböt, és megmérte a távolságát egy B, illetve egy C kőtömbtől. A mérések eredményeként* 184 m *és* 241 m *adódott. Majd megmérte, hogy az A kőtömb helyéről a B és a C kőtömb által meghatározott szakasz milyen szögben látszik. A mérés szerint ez a szög $41^\circ\,23'$ nagyságú. Számoljuk ki mi is a kör sugarát.*

b) *Milyen távol van az a) feladatrészben szereplő kultikus kör középpontjától az a fa, amely éppen ott áll, ahol a körhöz a B és a C pontokban húzott érintőegyenesek metszik egymást?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Az ABC háromszögből koszinusztétellel számolható a BC szakasz hossza:

$$\begin{aligned}BC^2&=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos(CAB\sphericalangle)=\\&=241^2+184^2-2\cdot241\cdot184\cdot\cos41^\circ\,23'\approx25\,394{,}09.\end{aligned}$$

Ebből adódik: $BC\approx159{,}36$.



Alkalmazzuk az $a=2r\sin\alpha$ összefüggést:

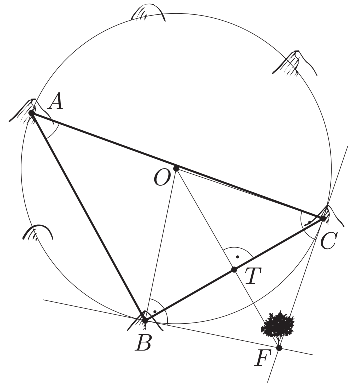
$$159{,}36=2r\cdot\sin41^\circ\,23'.$$

Ebből a kör sugara: $r=OC\approx120{,}53$ m.

b) A körhöz a B és a C pontokban húzott érintőegyenesek metszéspontja legyen F. Mivel a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, azért $CF=BF$, továbbá $OC=OB$, mivel ezek a kör sugarai. Vagyis az $OCFB$ négyszög deltoid, és OF a szimmetriaátlója. Ennek a szakasznak a hosszát keressük. (Tehát az O pont, a T pont, vagyis a BC húr felezőpontja és az F pont egy egyenesre esnek.)

A középponti és a kerületi szögek közötti összefüggés alapján:

$$COT\sphericalangle=\frac{1}{2}\cdot COB\sphericalangle=CAB\sphericalangle=41^\circ\,23'.$$



Mivel a kör érintője merőleges az adott pontba húzott sugárra, azért az OCF háromszög derékszögű, tehát felírható:

$$\frac{OC}{OF} = \frac{120{,}53}{OF} = \cos 41^\circ\, 23'.$$

Ebből $OF \approx 160{,}64$ méter adódik.

Vagyis a fa kb. 160,64 méterre van a kör középpontjától.

II. rész

5. *a) Egy hordóban alkohol vizes oldatából* 10 *litert tároltunk. Először kivettünk belőle két litert, amit két liter tiszta vízzel pótoltunk. Majd kivettünk belőle* 1 *litert. Végül hozzáadtunk* 6 *liter alkoholt, amely* 77 *térfogatszázalékos vizes oldat volt. Így* 50 *térfogatszázalékos vizes oldatot kaptunk. Hány térfogatszázalékos volt az eredeti oldat?*

(*Egy oldat térfogatszázaléka:* $\dfrac{\text{oldott anyag térfogata}}{\text{oldat térfogata}} \cdot 100$.)

b) Oldjuk meg a

$$\cos x = (x - 2\pi)^2 + 1$$

egyenletet.

c) A radioaktív bomlási törvény

$$N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

megadja, hogy a T felezési idejű és kezdetben N_0 számú atommagot tartalmazó radioaktív anyagból t idő eltelte után mennyi a megmaradt el nem bomlott atommagok N száma. Egy ősrégi növényi kövület esetén megmérték, hogy jelenleg benne a $^{14}\mathrm{C}$ szénizotóp koncentrációja 65 *százaléka annak a $^{14}\mathrm{C}$ koncentrációnak, mely a növényt akkor jellemezte, amikor élt. A $^{14}\mathrm{C}$ szénizotóp felezési ideje* 5730 év. *Mikor élt a növény?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az utolsó lépésben 9 liter y térfogatszázalékos oldathoz adtunk 6 liter 77 térfogatszázalékos oldatot. Az y számolható a következő egyenletből:

$$9 \cdot \frac{y}{100} + 6 \cdot \frac{77}{100} = 15 \cdot \frac{50}{100}.$$

Az egyenlet megoldása: $y = 32$.

Tehát a 6 liter 77 térfogatszázalékos oldatot 9 liter 32 térfogatszázalékos oldathoz adtuk hozzá. A 9 liter 32 térfogatszázalékos oldat úgy jött létre, hogy egy litert kivettünk, vagyis 10 liter 32 térfogatszázalékos oldatunk volt. Ez a 10 liter 32 térfogatszázalékos oldat keletkezett a két liternyi tiszta víz 8 liter x térfogatszázalékos oldatba való visszapótlásakor. Az x számolható a következő egyenletből:

$$8 \cdot \frac{x}{100} + 2 \cdot \frac{0}{100} = 10 \cdot \frac{32}{100}.$$

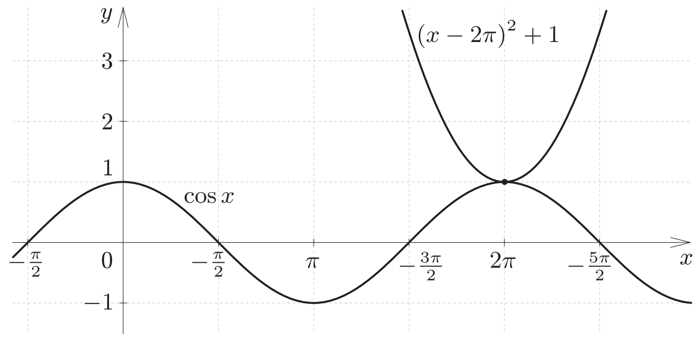
Az egyenlet megoldása: $x = 40$.

A nyolc liter 40 térfogatszázalékos oldat úgy keletkezett, hogy az eredeti oldatból kivettünk 2 litert, vagyis az eredeti oldat térfogatszázalékát ezzel a művelettel nem változtattuk meg, ami azt jelenti, hogy eredetileg 40 térfogatszázalékos oldat volt a hordóban.

b) Tudjuk, hogy az egyenlet bal oldalán álló kifejezés értékkészlete: $-1 \le \cos x \le 1$, és tudjuk, hogy az egyenlet jobb oldalán álló kifejezés értékkészlete pedig: $(x - 2\pi)^2 + 1 \ge 1$. Egyenlőség csak akkor lehet, ha a két oldal ugyanazon x esetén veszi fel az 1 értéket. A jobb oldal csak $x = 2\pi$-nél egyenlő 1-gyel, és ekkor a bal oldal értéke is 1.

Vagyis az egyenlet egyetlen megoldása: $x = 2\pi$.

Megjegyzés. A grafikus megoldás is járható út.



A grafikonról leolvasható, hogy $x = 2\pi$. Visszahelyettesítéssel látható, hogy ez valóban gyök.

c) Az N értéke kifejezhető N_0 segítségével: $N = N_0 \cdot 0{,}65$. Az adatok behelyettesítése után:

$$N_0 \cdot 0{,}65 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

N_0-val oszthatunk, majd mindkét oldal tízes alapú logaritmusát véve:

$$\lg 0{,}65 = \lg \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

A megfelelő azonosság alkalmazása után: $\lg 0{,}65 = \dfrac{t}{5730} \cdot \lg \dfrac{1}{2}$. Ebből $t \approx 3561$ év adódik.

6. *Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cdot (x-3) - 10x$ függvényt.*

a) *Adjuk meg az f függvény $-\infty$-ben és $+\infty$-ben vett határértékét.*

b) *Határozzuk meg az f függvény monotonitását.*

c) *Az f függvény, valamint a $g\colon [0;6] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x$ függvény grafikonja által közbezárt alakzatot egy építész díszítőelemként szeretné felhasználni. Ehhez olyan koordinátarendszerben rajzolta fel a függvényeket, melyben a tengelyeken az egy egység* 1 cm *hosszú, és ebből az ábrából készítette el a sablont a festéshez. Hány doboz festék kell* 2014 *díszítőelem felfestéséhez, ha egy doboz festék* 4 *négyzetméterre elegendő?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Célszerű a hozzárendelési utasításban megadott kifejezést átalakítani:

$$x^2 \cdot (x-3) - 10x = x^3 - 3x^2 - 10x.$$

Az f függvény $+\infty$-ben vett határértéke:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^3 - 3x^2 - 10x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 10x}{1} = \lim_{x\to+\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}\right) = +\infty.$$

Az első tényező $+\infty$-hez tart, a zárójelen belüli kifejezés pedig az egyhez tart (ugyanis a $\dfrac{3}{x}$ és a $\dfrac{10}{x^2}$ a nullához tartanak), ezért a szorzat a $+\infty$-hez tart.

Az f függvény $-\infty$-ben vett határértéke:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x^3 - 3x^2 - 10x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 - 10x}{1} = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}\right) = -\infty.$$

Az első tényező $-\infty$-hez tart, a zárójelen belüli kifejezés pedig az egyhez tart, ezért a szorzat a $-\infty$-hez tart.

b) A függvény növekedési és fogyási viszonyaira az első deriváltból lehet következtetni:

$$\left[x^3 - 3x^2 - 10x\right]' = 3x^2 - 6x - 10.$$

Az első derivált zérushelyei a $3x^2 - 6x - 10 = 0$ egyenlet megoldásai: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\dfrac{13}{3}}$.

	$x < 1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$	$x = 1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$	$1 - \sqrt{\frac{13}{3}} < x < 1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$	$x = 1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$	$1 + \sqrt{\frac{13}{3}} < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	növekedő	lokális maximum	fogyó	lokális minimum	növekedő

c) Az $f(x) = x^2 \cdot (x-3) - 10x$ függvény és az $x \in [0;6]$ intervallumon értelmezett $g(x) = 8x$ függvény metszéspontjai az $x^3 - 3x^2 - 10x = 8x$ egyenletből kaphatók. Átrendezve az egyenletet, és x-et kiemelve adódik: $x \cdot \big(x^2 - 3x - 18\big) = 0$. Ennek megoldásai az adott intervallumon: $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ ($x_3 = -3$ nincs az adott intervallumban), ezért az $f(x)$ és a $g(x)$ függvények $x \in [0;6]$ intervallumra eső görbéi által meghatározott zárt terület nagyságát kell kiszámolnunk.

A keresett terület:

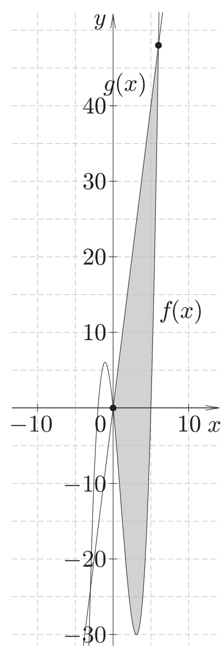
$$\int_0^6 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^6 \big(8x - \big(x^3 - 3x^2 - 10x\big)\big)\,dx =$$

$$= \int_0^6 \big(-x^3 + 3x^2 + 18x\big)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 + 9x^2\right]_0^6 = -\frac{6^4}{4} + 216 + 324 = 216\ (\mathrm{cm}^2).$$

2014 darab ilyen motívum összterülete:

$$2014 \cdot 216\ \mathrm{cm}^2 = 435\,024\ \mathrm{cm}^2 = 43{,}5024\ \mathrm{m}^2.$$



Lefestésükhöz 11 doboz festék szükséges.

7. *a*) *Adjuk meg a következő állítások megfordítását. Döntsük el az eredeti állításokról és a megfordításaikról, hogy melyik igaz, melyik hamis.*

1. *Ha egy háromszögnek van két hegyesszöge, akkor van egy tompaszöge.*
2. *Ha két vektor tompaszöget zár be egymással, akkor skaláris szorzatuk negatív.*
3. *Ha egy függvénynek egy adott x_0 pontbeli deriváltja 0, akkor a függvénynek az adott x_0 helyen szélsőértéke van.*
4. *Ha egy sokszög szabályos, akkor középpontosan szimmetrikus.*
5. *Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.*

b) *Fogalmazzuk meg az 5. állítást és megfordítását egyetlen mondatban.*
c) *Egy kalapban golyók, játékkockák és papírkorongok vannak. A következőket tudjuk biztosan:*

– *A kalapban golyóból is, játékkockából is és papírkorongból is van legalább kettő.*

– *A tárgyak színe különböző is lehet, de mindegyik tárgy színe egyértelmű.*

– *A kalapban minden golyó lila.*

– *A kalapban nincs lila játékkocka.*

Egy robot véletlenszerűen kiválaszt egy tárgyat a kalapból, de ezt nem mutatja meg nekünk. Döntsük el melyik állítás igaz és melyik hamis a következők közül. Indokoljuk válaszainkat.

I. *Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem golyó, akkor biztosan nem lila.*

II. *Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem lila, akkor biztosan nem golyó.*

III. *Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem lila, akkor biztosan játékkocka.*

IV. *Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem játékkocka, akkor biztosan lila.*

d) A szünetben gyerekek szaladgálnak az iskola udvarán, megszámolni őket képtelenség. Semmit nem tudunk ezekről a gyerekekről, de azt az egy információt megkaptuk, hogy van köztük 54 *fő, akiknek azonos hónapban van a születésnapjuk.*

I. *Legalább hány gyerek van az udvaron?*

II. *Mennyinek kell lennie egy számunkra ismeretlen születési adatokkal rendelkező, tetszőlegesen kiválasztott gyerekekből álló csoport létszámának, hogy biztonsággal állíthassuk, hogy van köztük* 20 *fő, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapjuk?* *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Az állítások megfordítása:

1. Ha egy háromszögnek van egy tompaszöge, akkor van két hegyesszöge.
2. Ha két vektor skaláris szorzata negatív, akkor tompaszöget zárnak be egymással.
3. Ha egy függvénynek egy adott x_0 helyen szélsőértéke van, akkor a függvény adottx_0 pontbeli deriváltja 0.
4. Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor szabályos.
5. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor középpontosan szimmetrikus.

	Állítás	Megfordítása
1. állítás	hamis	igaz
2. állítás	igaz	hamis
3. állítás	hamis	igaz
4. állítás	hamis	hamis
5. állítás	igaz	igaz

b) Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha középpontosan szimmetrikus.

c) Az I. állítás hamis, mert lehet, hogy papírkorongot választott a robot, azok között pedig lehet lila.

A II. állítás igaz, mert annak, hogy golyó legyen, szükséges feltétele, hogy lila is legyen.

A III. állítás hamis, mert ha a kiválasztott tárgy nem lila, akkor az akár papírkorong is lehet.

A IV. állítás hamis, mert ha a tárgy nem játékkocka, akkor nemcsak golyó lehet, hanem papírkorong is, ami viszont nem feltétlenül lila.

d) I. Nyilvánvaló, hogy legalább 54-en kell, hogy legyenek.

II. A skatulya elvet felhasználva $12 \cdot 19 + 1 = 229$ számú gyerekről teljes biztonsággal állíthatjuk, hogy van köztük 20 fő, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapja.

8. *Egy cipőbolt vásárlói közül* 60 *felnőtt férfit kérdeztünk meg a lábméretéről. Az így kapott adatokat az alábbi táblázatban rögzítettük.*

39	44	42	40	45	43	40	42	45	43
43	41	45	41	46	43	44	43	48	45
46	42	44	47	38	42	45	44	44	39
40	46	43	41	45	46	45	40	43	44
45	43	46	44	42	43	41	45	42	40
44	42	41	45	42	44	45	41	44	45

a) Határozzuk meg az egyes cipőméretek gyakoriságát és relatív gyakoriságát. Az eredményeket foglaljuk táblázatba.

b) Készítsünk kördiagramot az egyes cipőméretek előfordulási számáról.

c) Határozzuk meg a 60 *felnőtt férfi átlagos cipőméretét, és számoljuk ki a cipőméretek szórását.*

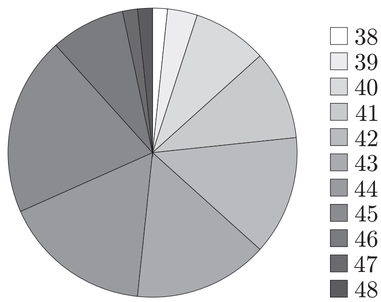
d) Mennyi a cipőméretek módusza, mediánja és terjedelme? *(16 pont)*

Megoldás. *a*)

méret	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
gyakoriság	1	2	5	6	8	9	10	12	5	1	1
relatív gyakoriság	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{8}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{10}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$

b)

Cipőméret	A kördiagramon az adott cipőmérethez tartozó középponti szög fokban
38	6
39	12
40	30
41	36
42	48
43	54
44	60
45	72
46	30
47	6
48	6



c) A cipőméretek átlaga:

$$\frac{38+2\cdot 39+5\cdot 40+6\cdot 41+8\cdot 42+9\cdot 43+10\cdot 44+12\cdot 45+5\cdot 46+47+48}{60}\approx 43,17.$$

A cipőméretek szórása:

$$\sqrt{\frac{(43{,}17-38)^2+2(43{,}17-39)^2+\ldots+(43{,}17-47)^2+(43{,}17-48)^2}{60}}\approx 2{,}15.$$

d) A cipőméretek módusza: 45, mediánja: 43, terjedelme: 10.

9. *a*) *Felírtunk egy papírra 5 számot. Az első három szám egy számtani sorozat három egymást követő eleme. A harmadik, a negyedik és az ötödik szám szintén egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Az első, a harmadik és a negyedik szám szintén egy számtani sorozat egymást követő elemei. A második, a harmadik és a negyedik szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme. A számok összege 26. Melyik ez az öt szám?*
b) *Összeadtuk a* 2^1; 2^2; 2^3; $\ldots$; 2^{99}; 2^{100} *hatványok* x *alapú logaritmusát és* 10 100*-at kaptunk. Mennyi az* x *értéke?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az öt szám: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. A feladat szövege alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{cases} x_2-x_1=x_3-x_2,\\ x_4-x_3=x_5-x_4,\\ x_3-x_1=x_4-x_3,\\ \dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{x_4}{x_3},\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=26. \end{cases}$$

Az egyenletrendszert az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével oldjuk meg.

Az első egyenletből kapjuk, hogy $x_1=2x_2-x_3$, ezt behelyettesítve a harmadik és az utolsó egyenletbe, négy egyenletünk marad:

$$\begin{cases} x_4-x_3=x_5-x_4,\\ x_3-(2x_2-x_3)=x_4-x_3,\\ \dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{x_4}{x_3},\\ (2x_2-x_3)+x_2+x_3+x_4+x_5=26. \end{cases}$$

Néhány egyenlet átrendezése után kapjuk:

$$\begin{cases} 2x_4-x_3=x_5,\\ 3x_3-2x_2=x_4,\\ \dfrac{x_3}{x_2}=\dfrac{x_4}{x_3},\\ 3x_2+x_4+x_5=26. \end{cases}$$

Az $x_5 = 2x_4 - x_3$ kifejezést behelyettesítve az utolsó egyenletbe:

$$\begin{cases} 3x_3 - 2x_2 = x_4, \\ \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{x_4}{x_3}, \\ 3x_2 + x_4 + (2x_4 - x_3) = 26. \end{cases}$$

Az utolsó egyenlet rendezése és az $x_4 = 3x_3 - 2x_2$ behelyettesítése után:

$$\begin{cases} \dfrac{x_3}{x_2} = \dfrac{3x_3 - 2x_2}{x_3}, \\ 3x_2 - x_3 + 3(3x_3 - 2x_2) = 26. \end{cases}$$

A második egyenletből kifejezett $x_2 = \dfrac{8x_3 - 26}{3}$ érték behelyettesítése után másodfokú egyenletet kapunk:

$$x_3^2 = 3 \cdot \frac{8x_3 - 26}{3} x_3 - 2\left(\frac{8x_3 - 26}{3}\right)^2.$$

Az egyenlet nullára redukált alakja: $5x_3^2 - 46x_3 + 104 = 0$.

A megoldóképlet alkalmazása után x_3-ra két érték adódik: $x_{3_1} = 4$; $x_{3_2} = 5{,}2$.

Elvégezve a megfelelő visszahelyettesítéseket a következő két megoldást kapjuk:

1. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 5{,}2$.

2. $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$; $x_4 = 8$; $x_5 = 12$.

b) A feladat feltételei alapján a következő egyenlet írható fel:

$$\log_x 2^1 + \log_x 2^2 + \log_x 2^3 + \ldots + \log_x 2^{99} + \log_x 2^{100} = 10\,100, \quad \text{ahol } x > 0;\ x \neq 1.$$

A megfelelő azonosságot alkalmazva kapjuk:

$$\begin{aligned} \log_x \left(2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{99} \cdot 2^{100}\right) &= 10\,100, \\ \log_x \left(2^{\frac{(100+1)100}{2}}\right) &= 10\,100, \\ \log_x 2^{5050} &= 10\,100, \\ 5050 \cdot \log_x 2 &= 10\,100, \\ \log_x 2 &= 2. \end{aligned}$$

A logaritmus definíciója miatt az egyedüli megoldás: $x = \sqrt{2}$.