

Megoldásvázlatok a 2013/9. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Egy televíziós tehetségkutató műsorban négy mentor énekesei versenyeznek. A nézők telefonos szavazatai alapján alakul ki a sorrend. A műsorvezető az izgalom fokozása miatt minden mentornak ad egy kis információt a szavazás állásáról. Sorban ezek az állítások hangzottak el:

A három versenyző közül pontosan kettő nincs az utolsó három hely egyikén.

A két versenyző közül pontosan egy áll az utolsó három hely egyikén.

A két versenyző közül legalább egy az utolsó három hely egyikén áll.

A két versenyző közül legalább egy biztosan nincs az utolsó három hely egyikén.

a) A négy mentor közül gondolhatja-e ekkor valamelyik azt, hogy a versenyzői közül semelyik sincs az utolsó három hely egyikén?

b) Hányféle sorrend képzelhető el az elhangzott mondatok alapján? (11 pont)

Megoldás. a) Az elhangzottak alapján az első mentornak pontosan egy versenyzője az utolsó három hely valamelyikén áll. Hasonlóan a második mentornak is pontosan egy versenyzője áll az utolsó három hely valamelyikén. A harmadik mentor egy vagy kettő versenyzője lehet ezeken a helyeken, de az eddigiek alapján tudható, hogy már csak egy ilyen versenyző lehet. Mindezeket figyelembe véve a negyedik mentor két versenyzője közül „a legalább egy biztosan nincs az utolsó három hely egyikén” úgy valósulhat meg, hogy egyik sincs az utolsó három hely egyikén.

Vagyis a negyedik mentor nyugodt lehet, mert az utolsó három hely egyikén sincs versenyzője.

b) Legyen az első mentor három versenyzője: A_1, A_2, A_3 , a második mentoré: B_1, B_2 , a harmadik mentoré: C_1, C_2 , a negyedik mentoré pedig: D_1, D_2 . Ezt a kilenc versenyzőt kell a megfelelő információk alapján az összes lehetséges módon sorba rendezve elképzelnünk.

Tudjuk, hogy az első, második és harmadik mentor egy-egy versenyzője az utolsó három hely valamelyikén áll (például az A_1, B_1, C_1 versenyzők). A további hat versenyző ezeket 6!-féle sorrendben előzheti meg. A három versenyző pedig 3!-féle sorrendben állhat az utolsó három helyen. Ez $6! \cdot 3! = 4320$ eset. A három gyengén szereplő kiválasztására is több lehetőségünk van. Összesen $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ -féleképpen képzelhető az utolsó három helyen végzetek kiválasztása. Vagyis az összes elképzelhető sorrendek száma: $12 \cdot 4320 = 51\,840$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\lg(2-x) \cdot \sqrt{6-x-x^2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0. \quad (12 \text{ pont})$$

Megoldás. A logaritmus miatt: $2-x > 0$. Ezek szerint: $x \in]-\infty; 2[$. A négyzetgyök miatt: $6-x-x^2 \geq 0$, azaz $(2-x)(x+3) \geq 0$. Ezek szerint: $x \in [-3; 2[$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $x \in [-3; 2[$.

A három tényező zérushelyeit külön-külön megvizsgáljuk.

Az első tényező zérushelye az 1, és ez benne van a feladat értelmezési tartományában.

A második tényező zérushelyei a -3 és a 2 . Ebből csak a -3 van benne a feladat értelmezési tartományában.

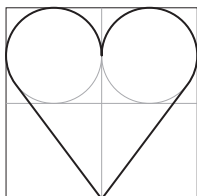
A harmadik tényező zérushelyei a $\frac{\pi}{6} + k\pi$, ahol k egész szám. A feladat értelmezési tartománya miatt csak a $k = -1$ és a $k = 0$ ad megfelelő értéket.

Ezek alapján a feladat megoldásai:

$$-3, \quad -\frac{5\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6}, \quad 1.$$

3. Enikő pólóján egy olyan szív alakú forma látható, amelyet egy 24 cm oldalú négyzetbe lehet rajzolni az ábrán látható módon.

Mekkora az így kapott szív kerülete, területe? (14 pont)



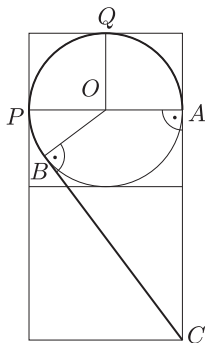
Megoldás. Az ábra függőlegesen szimmetrikus, ezért elég a felével foglalkoznunk.

A körök sugara a nagy négyzet oldalának negyedével egyenlő hosszú, azaz 6 cm. Adott körhöz külső pontból két azonos hosszúságú érintőszakasz húzható, ezért $CA = CB$. A CA pedig a nagy négyzet oldalának háromnegyedével egyenlő.

Vagyis $CA = CB = 18$ cm. Ezek alapján a $CAOB$ derékszögű deltoid területe:

$$T_1 = 6 \cdot 18 = 108 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Az OBC derékszögű háromszögben az O -nál lévő α hegyesszögre: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{18}{6} = 3$, vagyis $2\alpha \approx 143,13^\circ$.



A $360^\circ - 143,13^\circ = 216,87^\circ$ -os AB körívhez tartozó körcikk területe:

$$T_2 = 6^2 \cdot \pi \cdot \frac{216,87^\circ}{360^\circ} \approx 68,13 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A szív alakú forma területe:

$$2(T_1 + T_2) = 2(108 + 68,13) = 352,26 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

A $360^\circ - 143,13^\circ = 216,87^\circ$ -os AB körív hossza:

$$I = 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot \frac{216,87^\circ}{360^\circ} \approx 22,71 \text{ (cm)}.$$

A szív alakú forma kerülete:

$$K = 2(I + BC) = 2(22,71 + 18) = 81,42 \text{ (cm)}.$$

4. Kiválasztottunk nyolc olyan várost, amelyek közül bármelyik kettő között közvetlen repülőgép összeköttetés van. Egy téli napon a rendkívüli időjárási viszonyok miatt az összes ilyen útvonalból kilencen szüneteltetik a közlekedést. Mennyi annak a valószínűsége, hogy négy véletlenszerűen választott útvonalból pontosan kettőn van közlekedés? (14 pont)

Megoldás. Mivel bármelyik kettő között közvetlen repülőgép összeköttetés van, ezért a nyolc város között összesen $\binom{8}{2}$, azaz 28 útvonal van. Összeszámoljuk az összes lehetőségek számát. A 28 útvonal közül négyet választunk véletlenszerűen. Ezt $\binom{28}{4}$ -féleképpen tehetjük meg. Most a vizsgált esemény szempontjából a kedvező eseteket számoljuk össze. A két útvonalat, amelyen nincs közlekedés kilencből választhatjuk, a két útvonalat, amelyen pedig van közlekedés, 19-ből választhatjuk. Vagyis ezek száma összesen: $\binom{9}{2} \binom{19}{2}$.

A keresett valószínűséget a kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosa adja:

$$p = \frac{\binom{9}{2} \binom{19}{2}}{\binom{28}{4}} \approx 0,3.$$

II. rész

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = 10,24. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. Csak pozitív számnak van logaritmus, ezért $x > 0$, továbbá a nevezők nem lehetnek 0-val egyenlők, ezért $x \neq 10^5$, valamint $x \neq 10^{-1}$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $\mathbb{R}^+ \setminus \{10^{-1}; 10^5\}$.

Mivel

$$10,24 = \frac{1024}{100} = \frac{256}{25} = \frac{4^4}{\sqrt{5}^4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{-4},$$

azért az eredeti egyenletünk így írható:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{\frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^{-4}.$$

Az exponenciális függvény kölcsönös egyértelmősége alapján kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{12-2\lg x}{-5+\lg x} - \frac{4}{1+\lg x} &= -4, \\ (12-2\lg x)(1+\lg x) - 4(-5+\lg x) &= -4(-5+\lg x)(1+\lg x), \\ \lg^2 x - 5\lg x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Ez $\lg x$ -re másodfokú, az egyenlet két megoldása: $\lg x_1 = 2$, $\lg x_2 = 3$. Vagyis: $x_1 = 100$, $x_2 = 1000$.

Ezek benne vannak az értelmezési tartományban, valóban megoldásai az egyenletnek.

6. Az $ABCDEFGH$ kockát kettévágtuk az A csúcsra, a BF él felezőpontjára és az $ADHE$ oldallap Q középpontjára illeszkedő síkkal.

a) Mekkora a vágásfelület területe a kocka élével kifejezve?

b) Hogyan aránylik egymáshoz a kocka két részének térfogata?

(16 pont)

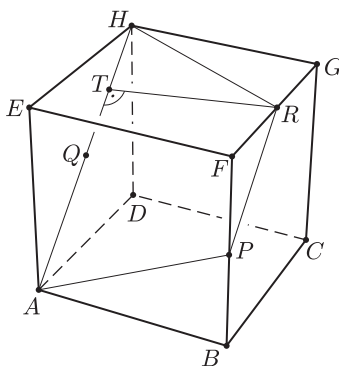
Megoldás. a) A vágás síkjában lévő AQ egyenesre illeszkedik a H pont, ezért H is rajta van a vágásfelületen. Az $ADHE$ és $BCGF$ párhuzamos lapjai a kockának, ezért a vágási síkkal alkotott metszésvonaluk párhuzamos egymással. Az egyik metszésvonal az AH egyenes, a vele párhuzamos P ponton áthaladó metszésvonal az FG élt az R felezőpontban metszi. Vagyis az $APRH$ síkidom (ami egy húrtrapéz) a vágásfelület, ennek a területét kell meghatároznunk.

Az $AH = a\sqrt{2}$, mert az a oldalú négyzet átlójáról van szó. A $PR = a\frac{\sqrt{2}}{2}$, mert ez a szakasz az a oldalú négyzet átlójának felével egyenlő hosszúságú. A $HR = AP$ szakasz hosszát meghatározhatjuk a HGR derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével:

$$HR = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

A vágás síkjában lévő RTH derékszögű háromszögben

$$TH = \frac{AH - PR}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Pitagorasz-tétel alkalmazásával megkapjuk az $APRH$ trapéz TR magasságát:

$$TR = \sqrt{HR^2 - TH^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2 - \frac{1}{8}a^2} = a\frac{3}{2\sqrt{2}} = a\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

A vágásfelület területe:

$$T = \frac{(a\sqrt{2} + a\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot a\frac{3\sqrt{2}}{4}}{2} = \frac{9}{8}a^2.$$

b) Az egyik rész egy AEH (egyenlő szárú, derékszögű háromszög) alaplapú és PFR fedőlapú csonkagúla. Alaplapjának területe: $T = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$, fedőlapjának területe:

$$t = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}.$$

A két sík távolsága a , ez adja a csonkagúla m magasságát.

Most már alkalmazhatjuk a csonkagúla térfogatképletét:

$$V_1 = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t) = \frac{a}{3} \left(\frac{a^2}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{8}} + \frac{a^2}{8} \right) = \frac{a}{3} \cdot \frac{7a^2}{8} = \frac{7}{24}a^3.$$

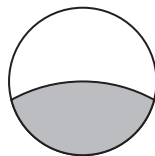
A másik rész térfogata:

$$V_2 = a^3 - \frac{7}{24}a^3 = \frac{17}{24}a^3.$$

Tehát a két rész aránya:

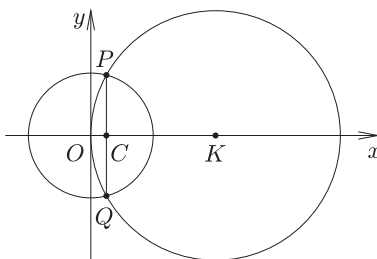
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7}{24}a^3}{\frac{17}{24}a^3} = \frac{7}{17}.$$

7. Az ábrán *Ibolya* egyik fülbevalójának vázlatrajza látható. A körlemez középpontján áthaladó körív sugara kétszerese az eredeti körlemez sugarának. A fülbevaló hány százaléka sötétebb árnyalatú? (16 pont)



Megoldás. Nem megy az általánosság rovására, ha a fülbevaló sugarát 1-nek, a benne lévő körív sugarát pedig 2-nek vesszük. Helyezzük az ábrát koordináta-rendszerbe olyan módon, hogy a kör O középpontja az origó, a körív középpontja a $K(2; 0)$ koordinátájú pont legyen. Ekkor a két kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 2)^2 + y^2 = 4.$$



Meg szeretnénk határozni a két kör metszéspontjainak koordinátáit, ezért megoldjuk az egyenletrendszert. A második egyenletben a négyzetre emelés elvégzése után az $x^2 + y^2$ helyére 1-et írhatunk:

$$-4x + 4 + 1 = 4, \quad x = \frac{1}{4}.$$

Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe, kapjuk a két metszéspont koordinátáit:

$$P\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4}\right), \quad Q\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

A fülbevaló sötétebb részét a PQ szakasz két körszeletre vágja. Ezeknek megadjuk külön-külön a területét. Alkalmazzuk a körszelet területképletét: $T = \frac{1}{2}[ri - h(r - m)]$, ahol r a körív sugara, i a körív hossza, h a határoló húr hossza, m pedig a körszelet magassága.

Az 1 sugarú körszelet területéhez már a következő adatok a rendelkezésünkre állnak:

$$r_1 = 1, \quad h_1 = PQ = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad m_1 = \frac{3}{4}.$$

Meg kell még adnunk a megfelelő PQ körív hosszát. Ehhez a POQ nagyságát kell ismernünk. A POC derékszögű háromszögben (ahol a PQ és a vízszintes tengely metszéspontja a C pont) az O -nál lévő β szögre:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15},$$

ahonnan $POQ = 2\beta \approx 151,04^\circ$. Vagyis

$$\frac{i_1}{2\pi} = \frac{151,04^\circ}{360^\circ}, \quad \text{azaz} \quad i_1 \approx 2,636.$$

Behelyettesítünk a területképletbe:

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[1 \cdot 2,636 - \frac{\sqrt{15}}{2} \left(1 - \frac{3}{4} \right) \right] \approx 1,076.$$

A 2 sugarú körszelet területéhez pedig a következő adatok állnak a rendelkezésünkre:

$$r_2 = 2, \quad h_2 = h_1 = \frac{\sqrt{15}}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{4}.$$

Most is meg kell adnunk a megfelelő PQ körív hosszát. Ehhez a PKQ nagyságát kell ismernünk. A PKC derékszögű háromszögben a K -nál lévő α szögre:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{7},$$

ahonnan $PKQ = 2\alpha \approx 57,91^\circ$. Vagyis

$$\frac{i_2}{4\pi} = \frac{57,91^\circ}{360^\circ}, \quad \text{azaz} \quad i_2 \approx 2,021.$$

Megint behelyettesítünk a területképletbe:

$$T_2 = \frac{1}{2} \left[2 \cdot 2,021 - \frac{\sqrt{15}}{2} \left(2 - \frac{1}{4} \right) \right] \approx 0,327.$$

A sötétebb színnel színezett rész területe $T_1 + T_2 = 1,076 + 0,327 = 1,403$, a fülbevaló területe pedig π .

Vagyis a fülbevaló kb. 44,7%-a sötétebb árnyalatú.

8. Egy harmadfokú függvényről tudjuk, hogy $f(2) = f(4) = 4$, a harmadfokú tag együtthatója 1, továbbá

$$\int_2^6 f(x) dx = 16.$$

Írjuk fel a függvénygörbe érintőjének egyenletét a görbe 5 abszcisszájú pontjában.

(16 pont)

Megoldás. A harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Tudjuk, hogy:

$$f(2) = 8 + 4b + 2c + d = 4, \quad f(4) = 64 + 16b + 4c + d = 4.$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} \int_2^6 f(x) dx &= \int_2^6 (x^3 + bx^2 + cx + d) dx = \left[\frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^3}{3} + c \cdot \frac{x^2}{2} + d \cdot x \right]_2^6 = \\ &= \left(\frac{6^4}{4} + b \cdot \frac{6^3}{3} + c \cdot \frac{6^2}{2} + d \cdot 6 \right) - \left(\frac{2^4}{4} + b \cdot \frac{2^3}{3} + c \cdot \frac{2^2}{2} + d \cdot 2 \right) = \\ &= (324 + 72b + 18c + 6d) - \left(4 + \frac{8}{3}b + 2c + 2d \right) = \\ &= \frac{208}{3}b + 16c + 4d + 320 = 16. \end{aligned}$$

A kapott három egyenlet rendezése után a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$4b + 2c + d = -4,$$

$$16b + 4c + d = -60,$$

$$208b + 48c + 12d = -912.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $b = -12$, $c = 44$, $d = -44$, azaz a harmadfokú függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 44$.

Meghatározzuk a keresett érintő meredekségét. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 24x + 44$, így $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 44 = -1$. Az érintő meredeksége: $m = -1$.

Mivel $f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5^2 + 44 \cdot 5 - 44 = 1$, ezért az érintési pont koordinátái: $E(5; 1)$.

Az $E(5; 1)$ pontra illeszkedő, $m = -1$ meredekségű érintő egyenlete: $x + y = 6$.

9. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x^2 - 2013^2)^2 - 1 = 8052x. \quad (16 \text{ pont})$$

Megoldás. Végezzük el a négyzetre emelést és adjunk mindkét oldalhoz 1-et:

$$x^4 - 2 \cdot 2013^2 \cdot x^2 + 2013^4 = 8052x + 1.$$

Adjunk mindkét oldalhoz $4 \cdot 2013^2 \cdot x^2$ -et, ekkor a bal oldalon továbbra is teljes négyzet lesz, és a jobb oldalon is kialakul egy teljes négyzet:

$$(x^2 + 2013^2)^2 = 4 \cdot 2013^2 \cdot x^2 + 8052x + 1,$$

$$(x^2 + 2013^2)^2 = (2 \cdot 2013x + 1)^2.$$

Rendezzük nullára az egyenletet, és bontsuk szorzattá az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosság segítségével:

$$(x^2 + 2013^2)^2 - (2 \cdot 2013x + 1)^2 = 0,$$

$$(x^2 + 2013^2 - 2 \cdot 2013x - 1)(x^2 + 2013^2 + 2 \cdot 2013x + 1) = 0.$$

Mindkét tényezőt tovább alakíthatjuk:

$$[(x - 2013)^2 - 1] \cdot [(x + 2013)^2 + 1] = 0.$$

Az első tényezőt tovább bonthatjuk szorzattá:

$$(x - 2013 - 1) \cdot (x - 2013 + 1) \cdot [(x + 2013)^2 + 1] = 0,$$

$$(x - 2014) \cdot (x - 2012) \cdot [(x + 2013)^2 + 1] = 0.$$

A harmadik tényező minden x esetén pozitív. Az első két tényezőből kapunk megoldást: $x_1 = 2014$, $x_2 = 2012$. Mivel átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért ezek az eredeti egyenletnek is a megoldásai.