Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

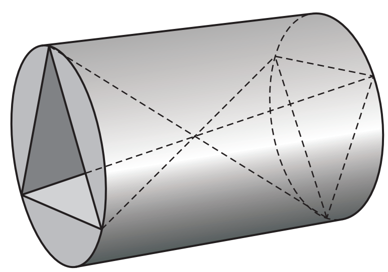
1. *a*) Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő kifejezés értékét:

$$\frac{2010201120122010 \cdot 2010201120122016}{2010201120122015} : \left(1 - \frac{5}{2010201120122015}\right).$$

b) Milyen k valós számok esetén van a $kx^2 - 3x^2 - k(2x-6) = 0$ egyenletnek pozitív valós gyöke? (*11 pont*)

2. Egy henger alakú rézalkatrészből hiányzik az *ábrán* látható módon két darab 4 cm élű szabályos tetraéder alakú rész.

A gyártó cégtől 65 000 darab ilyen alkatrészt rendeltek meg. Hány tonna rezet rendeljen a cég, ha a gyártás során fellépő veszteségek miatt a szükséges mennyiségnél 15%-kal több rezet kell felhasználniuk? (A réz sűrűsége 8960 kg/m^3.) (*12 pont*)



3. *a*) Az a-val és b-vel prímszámok négyzeteit jelöljük. Mennyi az a és b értéke, ha a $\sqrt{a} - \sqrt{2b}$ és $\sqrt{a} + \sqrt{2b}$ kifejezések egymás reciprokai?

b) Mutassuk meg, hogy $10 \mid 2^{2014} + 2^{2015} + 2^{2016} + 2^{2017}$.

c) Mutassuk meg, hogy $11 \mid 100^{2014} - 1$. (*14 pont*)

4. *a*) Egy ősi kultikus helyen több tonnás kőtömbök vannak elhelyezve egy körvonal mentén. Egy régész a következő módon határozta meg a kör sugarát: kiválasztott egy A kőtömböt, és megmérte a távolságát egy B, illetve egy C kőtömbtől. A mérések eredményeként 184 m és 241 m adódott. Majd megmérte, hogy az A kőtömb helyéről a B és a C kőtömb által meghatározott szakasz milyen szögben látszik. A mérés szerint ez a szög $41^\circ\,23'$ nagyságú. Számoljuk ki mi is a kör sugarát.

b) Milyen távol van az *a*) feladatrészben szereplő kultikus kör középpontjától az a fa, amely éppen ott áll, ahol a körhöz a B és a C pontokban húzott érintőegyenesek metszik egymást? (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Egy hordóban alkohol vizes oldatából 10 litert tároltunk. Először kivettünk belőle két litert, amit két liter tiszta vízzel pótoltunk. Majd kivettünk belőle 1 litert. Végül hozzáadtunk 6 liter alkoholt, amely 77 térfogatszázalékos vizes oldat volt. Így 50 térfogatszázalékos vizes oldatot kaptunk. Hány térfogatszázalékos volt az eredeti oldat?

(Egy oldat térfogatszázaléka: $\dfrac{\text{oldott anyag térfogata}}{\text{oldat térfogata}} \cdot 100$.)

b) Oldjuk meg a

$$\cos x = (x - 2\pi)^2 + 1$$

egyenletet.

c) A radioaktív bomlási törvény $\left(N = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\right)$ megadja, hogy a T felezési idejű és kezdetben N_0 számú atommagot tartalmazó radioaktív anyagból t idő eltelte után mennyi a megmaradt el nem bomlott atommagok N száma. Egy ősrégi növényi kövület esetén megmérték, hogy jelenleg benne a ^{14}C szénizotóp koncentrációja 65 százaléka annak a ^{14}C koncentrációnak, mely a növényt akkor jellemezte, amikor élt. A ^{14}C szénizotóp felezési ideje 5730 év. Mikor élt a növény?

(*16 pont*)

6. Tekintsük az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \cdot (x-3) - 10x$ függvényt.

a) Adjuk meg az f függvény $-\infty$-ben és $+\infty$-ben vett határértékét.

b) Határozzuk meg az f függvény monotonitását.

c) Az f függvény, valamint a $g\colon [0;6] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 8x$ függvény grafikonja által közbezárt alakzatot egy építész díszítőelemként szeretné felhasználni. Ehhez olyan koordinátarendszerben rajzolta fel a függvényeket, melyben a tengelyeken az egy egység 1 cm hosszú, és ebből az ábrából készítette el a sablont a festéshez. Hány doboz festék kell 2014 díszítőelem felfestéséhez, ha egy doboz festék 4 négyzetméterre elegendő? (*16 pont*)

7. *a*) Adjuk meg a következő állítások megfordítását. Döntsük el az eredeti állításokról és a megfordításaikról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

1. Ha egy háromszögnek van két hegyesszöge, akkor van egy tompaszöge.
2. Ha két vektor tompaszöget zár be egymással, akkor skaláris szorzatuk negatív.
3. Ha egy függvénynek egy adott x_0 pontbeli deriváltja 0, akkor a függvénynek az adott x_0 helyen szélsőértéke van.
4. Ha egy sokszög szabályos, akkor középpontosan szimmetrikus.
5. Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma.

b) Fogalmazzuk meg az 5. állítást és megfordítását egyetlen mondatban.

c) Egy kalapban golyók, játékkockák és papírkorongok vannak. A következőket tudjuk biztosan:

– A kalapban golyóból is, játékkockából is és papírkorongból is van legalább kettő.

– A tárgyak színe különböző is lehet, de mindegyik tárgy színe egyértelmű.

– A kalapban minden golyó lila.

– A kalapban nincs lila játékkocka.

Egy robot véletlenszerűen kiválaszt egy tárgyat a kalapból, de ezt nem mutatja meg nekünk. Döntsük el melyik állítás igaz és melyik hamis a következők közül. Indokoljuk válaszainkat.

I. Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem golyó, akkor biztosan nem lila.

II. Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem lila, akkor biztosan nem golyó.

III. Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem lila, akkor biztosan játékkocka.

IV. Ha a kalapból kiválasztott tárgy nem játékkocka, akkor biztosan lila.

d) A szünetben gyerekek szaladgálnak az iskola udvarán, megszámolni őket képtelenség. Semmit nem tudunk ezekről a gyerekekről, de azt az egy információt megkaptuk, hogy van köztük 54 fő, akiknek azonos hónapban van a születésnapjuk.

I. Legalább hány gyerek van az udvaron?

II. Mennyinek kell lennie egy számunkra ismeretlen születési adatokkal rendelkező, tetszőlegesen kiválasztott gyerekekből álló csoport létszámának, hogy biztonsággal állíthassuk, hogy van köztük 20 fő, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapjuk? (*16 pont*)

8. Egy cipőbolt vásárlói közül 60 felnőtt férfit kérdeztünk meg a lábméretéről. Az így kapott adatokat az alábbi táblázatban rögzítettük.

39	44	42	40	45	43	40	42	45	43
43	41	45	41	46	43	44	43	48	45
46	42	44	47	38	42	45	44	44	39
40	46	43	41	45	46	45	40	43	44
45	43	46	44	42	43	41	45	42	40
44	42	41	45	42	44	45	41	44	45

a) Határozzuk meg az egyes cipőméretek gyakoriságát és relatív gyakoriságát. Az eredményeket foglaljuk táblázatba.

b) Készítsünk kördiagramot az egyes cipőméretek előfordulási számáról.

c) Határozzuk meg a 60 felnőtt férfi átlagos cipőméretét, és számoljuk ki a cipőméretek szórását.

d) Mennyi a cipőméretek módusza, mediánja és terjedelme? (*16 pont*)

9. *a*) Felírtunk egy papírra 5 számot. Az első három szám egy számtani sorozat három egymást követő eleme. A harmadik, a negyedik és az ötödik szám szintén egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Az első, a harmadik és a negyedik szám szintén egy számtani sorozat egymást követő elemei. A második, a harmadik és a negyedik szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme. A számok összege 26. Melyik ez az öt szám?

b) Összeadtuk a 2^1; 2^2; 2^3; $\ldots$; 2^{99}; 2^{100} hatványok x alapú logaritmusát és 10 100-at kaptunk. Mennyi az x értéke? (*16 pont*)