Egy nehéz Arany Dániel feladatról és egy szokatlan egyenlőtlenségről II. rész

A cikk első részében három megoldást közöltünk az idei Arany Dániel verseny legnehezebbnek bizonyult feladatára. A feladat így szólt:

2013 *valós számra fennáll:*

$$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{2012} \ge a_{2013} \ge 0, \quad \text{valamint}$$

$$(N) \qquad a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \ge \frac{61}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013} \ge \sqrt{2013}$!

Lehet-e a fenti 2013 *tagú összeg pontosan* $\sqrt{2013}$?

A látványtól az absztraktig

A harmadik bizonyítás (KöMaL, 63. évfolyam, 2013/9. szám, 515–522. oldal) geometriai környezetben vizsgálta a feladatot. Ha „kitakarjuk” a látványt, akkor kiderül, hogy a megoldás lelke egy egyenlőtlenség, amelyet a bizonyításban játszott szerepétől függetlenül is érdemes kimondani.

n-m lemma. *Legyenek* m *és* n *pozitív egészek és tekintsük az* $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge$ $\ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots \ge x_{n+m} \ge 0$ *sorozatot. Ekkor*

$$(nm2) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m})^2 \ge 4n\bigl(x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2\bigr).$$

Bizonyítás. Legyen $A = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a „nagy”, $B = x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}$ pedig a „kicsi” tagok összege. Ekkor egyrészt $(A+B)^2 \ge 4AB$, másrészt $A \ge nx_n$ miatt

$$AB \ge nx_n(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}).$$

Mivel pedig $x_n \ge x_{n+j}$ minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re, azért $x_n x_{n+j} \ge x_{n+j}^2$, készen is vagyunk.

Az egyenlőséghez szükséges $A = B$, és így a rendezés miatt $n \le m$ is. Ezen kívül még $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n}$ kell, továbbá, hogy a sorozat további tagjai, $x_{2n+1}, \ldots, x_{n+m}$ legyenek nullák. Mindez együtt pedig elégséges is.

Megjegyzések. 1. A bizonyításban a sorozat monotonitásából csak arra volt szükség, hogy a sorozatból elhagyott „nagy” elemek mindegyike legalább akkora, mint a meghagyott „kis” elemek bármelyike.

2. Ha a tagoknak több mint a felét hagyjuk el az $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_{n+m} \ge 0$ sorozat elejéről, azaz $n > m$, akkor a rendezés miatt $A > B$. A lemma bizonyításának első lépésében így $(A+B)^2 > 4AB$, az *n-m* lemmában tehát ilyenkor határozott egyenlőtlenség áll. Ha például $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge 0$, $(n = 1, m = 2)$, akkor a lemma csak annyit állít, hogy $(x_1 + x_2 + x_3)^2 > \mathbf{8}x_3^2$. A pontos alsó korlát nagyobb: $\mathbf{9}x_3^2$ (miért?), és pontosan akkor kapjuk, ha $x_1 = x_2 = x_3$.

Csak a rend kedvéért. Alkalmazzuk a lemmát az *Arany Dániel* feladat a_i sorozatára az $n = 33$, $m = 1980$ $(= 2013 - 33)$ szereposztással. Ekkor

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013})^2 \ge 4 \cdot 33 \cdot \bigl(a_{34}^2 + \ldots + a_{2013}^2\bigr),$$

a jobb oldal pedig a feltétel szerint nagyobb vagy egyenlő $4 \cdot 33 \cdot \dfrac{61}{4} = 2013$-nál. A lemma záradékából az egyenlőség feltétele is azonnal leolvasható.

A figyelmes Olvasó látja, hogy ez a cikk első részében közölt 3. megoldás, ezúttal a látvány nélkül.

Egy kézenfekvő általánosítás. *Legyenek* n *és* m *pozitív egészek. Ha a nemnegatív, fogyó* a_i *sorozatra*

$$a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots + a_{n+m}^2 \ge K, \quad \text{akkor} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+m} \ge \sqrt{4nK}.$$

(A feladatban $n = 33, m = 1980$ és $K = \dfrac{61}{4}$.) Az egyenlőséghez a rendezés miatt $n \le m$ szükséges, továbbá az, hogy

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n} = \sqrt{\frac{K}{n}}, \quad \text{és} \quad i > 2n \quad \text{esetén} \quad a_i = 0 \quad \text{legyen.}$$

A feltételek elégségesek is. Innen az is látszik, hogy az évszámhoz illesztett $2013 = 33 \cdot 61$ kapcsolat nem tartozik a feladat lényegéhez.

Sok lúd disznót győz

Ha $n = m$, akkor az *n-m lemmában*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n})^2 \geq 4n\left(x_{n+1}^2 + \ldots + x_{2n}^2\right).$$

Négyzetgyököt vonva és rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{(x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n})}{2n} \geq \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + \ldots + x_{2n}^2}{n}},$$

azaz $2n$ darab nemnegatív szám számtani közepe legalább akkora, mint az n-elemű részhalmazok négyzetes közepei közül a legkisebb[1]. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a számok mind egyenlők. (Miért?) Ez a megszokotthoz képest fordított állású egyenlőtlenség többféleképpen is általánosítható.

Igaz marad, ha a nagyság szerint csökkenő sorozat végéről kezdve a tagoknak *legfeljebb a felét* tartjuk meg: ezeknek a „kicsi” számoknak a *négyzetes közepe* ilyenkor sem lehet nagyobb a teljes sorozat *számtani közepénél* és pontosan akkor van egyenlőség, ha a számok egyenlők. Legalább kétszer annyi lúd kell tehát a disznógyőzéshez, mondja az alábbi

Sok lúd lemma. Ha $n \geq m$ (azaz $n + m \geq 2m$), akkor az $(n + m)$ elemű x_i sorozatra vonatkozó feltételek mellett

$$A_{n+m} = \frac{(x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m})}{n + m} \geq q_m = \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2}{m}}.$$

Ez az $A_{n+m} \geq q_m$ egyenlőtlenség majdnem minden esetben azonnal következik az $n = m$ esetből. Az A_{n+m} számtani közép ugyanis állandó, nem függ a sorozat kezdetéről elhagyott „nagy” tagok számától, n-től. A meghagyott m darab „kicsi” szám q_m négyzetes közepe pedig az m-mel együtt növekszik. Ha tehát a teljes sorozatnak összesen páros sok tagja van, akkor a jobb oldal $m = 1$-ről indul, értéke a számok legkisebbike, x_{n+m}, és növekedve érkezik el a már bizonyított $(n = m)$ egyenlőtlenséghez. Az egyetlen, még valóban bizonyításra szoruló esetben a teljes sorozatnak páratlan sok, $2n + 1$ eleme van, amelyek közül az első $n + 1$ darabot hagyjuk el: ha $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{2n+1} \geq 0$, akkor

$$\frac{(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1}) + (x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1})}{2n + 1} \geq \sqrt{\frac{x_{n+2}^2 + \ldots + x_{2n+1}^2}{n}}.$$

Hogy kedvet csináljunk ehhez a speciális esethez, emlékeztetünk arra, hogy $n = 2$ választással és némileg más alakban éppen ez volt az előző számunkban kitűzött **B. 4585.** feladat állítása. Ami az általános esetet illeti, a cikk első részének 3. kitűzött feladata az alábbi volt:

Ha $33 > k$*,* x *és* y *pedig olyan valós számok, amelyekre* $0 < y < x$*, akkor*[2]

$$(k + 1) \cdot \left(\frac{(33 + k)x + y}{34 + k}\right)^2 \geq kx^2 + y^2. \tag{4}$$

Ennek az állításnak a bizonyítása volt a cikk első részében közölt 2. bizonyítás hiányzó részlete. $(k + 1)$-gyel osztva és négyzetgyököt vonva

$$\frac{(33 + k)x + y}{33 + (k + 1)} \geq \sqrt{\frac{kx^2 + y^2}{k + 1}},$$

ez pedig éppen a *sok lúd lemma* az $n = 33$, $m = k + 1$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+m-1} = x$, $x_{n+m} = y$ szereposztásban.

A sok lúd lemma bizonyítása. Az állítást az eredetileg kimondott formában, általánosan bizonyítjuk be. Az $n = m$ eseten túl vagyunk, föltehető, hogy az összes számnak kevesebb mint a felét hagyjuk meg, azaz $n > m$. Nevezzük az elhagyott számokat *nagyoknak* – n darab van belőlük –, a megmaradókat pedig *kicsiknek*. Tegyünk félre a nagy számok közül tetszőlegesen $(n - m)$ darabot. A rendezés miatt ezek számtani közepe legalább akkora, mint az m darab kicsi szám q_m négyzetes közepe. A további $2m$ darab szám között ott van az m darab kicsi, a maradék m darab pedig nagy. Mint láttuk, ebben a speciális esetben az állítás igaz, tehát ennek a $2m$ darab számnak a számtani közepe szintén legalább q_m. Az állítás most már következik abból, hogy ha két számsorozat számtani közepe külön-külön nagyobb vagy egyenlő q_m-nél, akkor ez igaz a két sorozat egyesítésére is. Végül az egyenlőséghez szükséges, hogy a számok egyenlők legyenek, és ez elégséges is.

---

[1] Az idei tagozatos OKTV első fordulójának 5. feladata alapján ennél egy erősebb állítás is igaz: $(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n})^2 \geq 4n(x_1 \cdot x_{n+1} + \ldots + x_n \cdot x_{2n})$, de ezzel az élesítéssel most nem foglalkozunk.

[2] Az első részben ennek a feladatnak a kitűzésekor az m változó szerepelt a mostani k helyett. Ezért olvasóink elnézését kérjük, az m a cikknek ebben a részében mást jelöl.

Megjegyzés. Ha a *sok lúd lemma* egyenlőtlenségét „visszarendezzük”, akkor az *n-m lemma* állításához hasonló becslést kapunk. Tehát ha $0 < m \le n$, akkor

$$\big((x_1 + \ldots + x_n) + (x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m})\big)^2 \ge \frac{(n+m)^2}{m}\big(x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2\big).$$

Egyenlőség lehetséges, mégpedig pontosan akkor, ha a sorozat tagjai egyenlők.

Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőtlenség a **B. 4585.** kitűzött feladat általánosítása.

Ha $m = n$, akkor $\frac{(n+m)^2}{m} = 4n$, visszakapjuk az $n = m$ egyenlőtlenséget. Minden más esetben $\frac{(n+m)^2}{m} > 4n$, így, akárcsak a **B. 4585.** feladatban, most is megkapjuk az *n-m lemma* becslésénél nagyobb pontos alsó korlátot. Összefoglalva:

$$(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m})^2 \ge$$
$$\ge \begin{cases} \dfrac{(n+m)^2}{m}\big(x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2\big), & \text{ha } 0 < m \le n; \\ 4n\big(x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2\big), & \text{ha } n, m > 0. \end{cases}$$

Egyenlőség mindkét esetben lehetséges, de másképpen: az első becslésben akkor, ha az összes szám ugyanakkora, a másodikban pedig akkor, ha $m \ge n$, a sorozat első $2n$ tagja egyenlő, a többi pedig nulla. Ha $n = m$, akkor a két egyenlőtlenség azonos, ha $m \ne n$, akkor a két alsó korlát közül az első a nagyobb.

Ha a **minden** pozitív $\{n, m\}$ párra teljesülő *n-m lemmát* is a számtani és a négyzetes közepek kapcsolataként írjuk át, akkor azt kapjuk, hogy

$$(nm^*) \qquad \frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}}{n+m} \ge$$
$$\ge \lambda\sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + \ldots + x_{n+m}^2}{m}}, \quad \text{ahol} \quad \lambda = \frac{2\sqrt{nm}}{n+m} \le 1.$$

Ha $n = m$, akkor $\lambda = 1$, egyébként $\lambda < 1$.

Az (nm^*) egyenlőtlenségből kiolvasható, hogy a *sok lúd lemma* a sorozat elejéről elhagyható nagy tagok számának arányát illetően is éles: ha $n < m$, tehát az $\frac{n}{n+m}$ arány kisebb, mint $1/2$, akkor az m darab legkisebb szám négyzetes közepe már nagyobb lehet a teljes sorozat számtani közepénél.

Ha például $m = n + 1$, akkor, mint láttuk, az (nm^*) egyenlőtlenségben állhat egyenlőség, mégpedig akkor, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2n} > 0$ és $x_{2n+1} = 0$. E sorozat elemeinek a számtani közepe tehát éppen egyenlő az $m = n + 1$ darab „kicsi” szám négyzetes közepének a λ-szorosával. Mivel λ most kisebb 1-nél, erre a sorozatra

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n+1}}{2n+1} < \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + \ldots + x_{2n+1}^2}{n+1}}.$$

Ha tehát $(n+1)$ darab számot tartunk meg a négyzetes középhez, akkor $2n+1$ „lúd” már kevés.

Emeljük a tétet

Az I. rész 2. feladatában a versenyfeladathoz hasonló egyenlőtlenséget kellett igazolni, csak eggyel magasabb dimenzióban: azt kellett bizonyítani, hogy

Ha 2013 *valós számra fennáll, hogy* $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_{2012} \ge a_{2013} \ge 0$, *valamint hogy*

$$a_{67}^3 + a_{68}^3 + \ldots + a_{2013}^3 \ge \frac{61}{891},$$

akkor

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2013} \ge \sqrt[3]{2013},$$

és egyenlőség akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_{99} = \sqrt[3]{2013}/99$, *továbbá* $a_{100} = a_{101} = \ldots = a_{2013} = 0$.

A megoldás az *n-m lemma* alábbi háromdimenziós változatán múlik:

Legyenek n *és* m *pozitív egészek és tekintsük az* $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ge \ldots \ge x_{n+m} \ge 0$ *sorozatot. Ekkor*

$$(nm3) \qquad (x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+m})^3 \ge$$
$$\ge \frac{27}{4}n^2 \cdot \underbrace{\big(x_{n+1}^3 + \ldots + x_{n+m}^3\big)}_{m \text{ darab tag}}.$$

Aki eligazodik az $(A+B)$-élű kocka monoton fogyó felosztásán, az bizonyosan „látja” ezt az egyenlőtlenséget is. Mi lényegében lemásoljuk a kétdimenziós algebrai bizonyítást. Az $(A+B)^3$ mennyiségre keresünk alsó becslést, ahol A ismét az n darab „nagy”, B pedig az m darab „kicsi” szám összege. Ahogy két dimenzióban az AB szorzatot tudtuk a rendezést felhasználva alulról becsülni, most az A^2B szorzatra kapjuk, hogy

$$A^2B \geq n^2 \cdot x_n^2 \cdot (x_{n+1} + \ldots x_{n+m}),$$

hiszen $A \geq n \cdot x_n$ miatt $A^2 \geq (n \cdot x_n)^2$. Mivel $x_n \geq x_{n+j}$, azért $x_n^2 \cdot x_{n+j} \geq x_{n+j}^3$, és így

$$A^2B \geq n^2\left(x_{n+1}^3 + \ldots + x_{n+m}^3\right).$$

A bizonyítás befejezéséhez most már a három tagra felírt számtani és mértani közép egyenlőtlenségére van szükség:

$$\frac{A+B}{3} = \frac{\frac{A}{2} + \frac{A}{2} + B}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{A}{2}\right)^2 B}\,;$$

innen valóban kapjuk, hogy

$$(A+B)^3 \geq \frac{27}{4}A^2B \geq \frac{27}{4}n^2\left(x_{n+1}^3 + \ldots + x_{n+m}^3\right).$$

Az **egyenlőséghez** most $A = 2B$ és így a rendezés miatt $2m \geq n$ szükséges. A becslésekben kell még $A = n \cdot x_n$, illetve $x_n^2 \cdot x_{n+j} = x_{n+j}^3$, $(j = 1, \ldots m)$. Az előbbi a rendezés miatt pontosan akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, az utóbbi pedig akkor, ha $x_n = x_{n+j}$ vagy $x_{n+j} = 0$. Mivel a sorozat monoton fogyó, ez csak úgy lehetséges, ha van olyan $k \leq m$, hogy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = \ldots = x_{n+k} = x > 0 \quad \text{és} \quad x_{n+k+1} = \ldots = x_{n+m} = 0.$$

Így $A = nx = 2B = 2kx$ azt jelenti, hogy a háromdimenziós $n-m$ lemmában pontosan akkor van egyenlőség, ha n páros, a sorozat első $\frac{3}{2}n$ tagja egyenlő és pozitív, a további tagok pedig nullák.

Epilógus

A feladat megoldása most már egyszerű behelyettesítéssel adódik, ugyanúgy, ahogy az *Arany Dániel* feladat megoldását kaptuk a kétdimenziós *n-m lemmából.* Ezt a lépést hagyjuk az Olvasóra.

Ugyanígy javasoljuk, hogy az Olvasó mondja ki és bizonyítsa be a magasabb dimenziós *n-m lemmákat* is a megfelelő *sok lúd* lemmákkal együtt. Végül pedig másféle általánosításként az **A. 605.** feladatot ajánljuk.

Erben Péter, Pataki János