Megoldásvázlatok a 2011/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

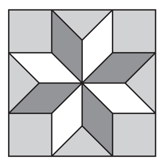
$$\frac{2x^2-1961x+4000}{x^2-2011x+2010}-\frac{x^2+51x-20}{(x-2010)(x-1)}=0. \qquad (\textit{11 pont})$$

Megoldás. A két nevező egyenlő. A feladat értelmezési tartománya: $x\in\mathbb{R}\backslash\{1;2010\}$. A számlálók különbségének nullát kell adnia:

$$\left(2x^2-1961x+4000\right)-\left(x^2+51x-20\right)=0.$$

A következő másodfokú egyenletet kapjuk: $x^2-2012x+4020=0$. A gyökök: $x_1=2$, $x_2=2010$. A feladat megoldása az $x_1=2$, mert csak ez van benne az értelmezési tartományban.

2. *Nagymama konyháját az ábrán látható négyzet alakú járólapokkal burkolták. A lap belsejében a mintát alkotó szakaszok mindegyike* 5,8 cm *hosszú. A nyolc egybevágó rombuszból négy fehér, négy piros, a lap többi része szürke.*



a) Adjuk meg egy járólap méretét milliméterre kerekítve. b) A járólap területének hány százaléka piros, és hány százaléka szürke? c) Egy járólapot a középpontján át, két fehér rombusz átlója mentén kettévágunk. Milyen hosszú a vágás?

(*13 pont*)

A négyzet alakú járólap oldala: $a=2x+x\sqrt{2}=x\left(2+\sqrt{2}\right)$, ahol $x=5{,}8$ cm. Vagyis milliméterre kerekítve: $a\approx 19{,}8$ cm.

b) A járólap területe: $T=5{,}8^2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)^2\approx 392{,}14$ (cm^2). A szürke rész hat darab 5,8 cm oldalhosszúságú négyzet területével egyenlő:

$$t_{\text{szürke}}=6\cdot 5{,}8^2=201{,}84\ (\text{cm}^2).$$

A maradék fele piros:

$$t_{\text{piros}}=\frac{392{,}14-201{,}84}{2}=95{,}15\ (\text{cm}^2).$$

Százalékokat kell meghatároznunk:

$$\frac{201{,}84\cdot 100}{392{,}14}\approx 51{,}47,\quad \text{illetve}\quad \frac{95{,}15\cdot 100}{392{,}14}\approx 24{,}26.$$

Vagyis a szürke rész kb. 51,47%, a piros rész pedig kb. 24,26%.

c) Az ABC derékszögű háromszög AB átmérőjének hosszát kell meghatároznunk. Tudjuk, hogy $BC=5{,}8\cdot\sqrt{2}$, $AC=5{,}8\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)$. Alkalmazzuk a Pitagorasz-tételt:

$$AB=\sqrt{\left(5{,}8\cdot\sqrt{2}\right)^2+5{,}8^2\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)^2}\approx 21{,}4.$$

Vagyis a vágás hossza kb. 21,4 cm.

3. *Határozzuk meg azt a pozitív egész x értéket, amelyre a következő összeg egészekre kerekítve* 2540 *lesz.*

$$\log_x\left(5\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\log_x\left(5^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\log_x\left(5^3\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+\ldots+\log_x\left(5^{99}\cdot\sqrt{\frac{99}{100}}\right). \qquad (\textit{13 pont})$$

Megoldás. Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\log_x 5 + \log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x 5^2 + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \log_x 5^3 + \log_x \sqrt{\frac{3}{4}} + \ldots + \log_x 5^{99} + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(\log_x 5 + \log_x 5^2 + \ldots + \log_x 5^{99}\right) + \left(\log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}}\right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\log_x 5 + \log_x 5^2 + \ldots + \log_x 5^{99} = 1 \cdot \log_x 5 + 2 \cdot \log_x 5 + \ldots + 99 \cdot \log_x 5 =$$
$$= (1+2+3+\ldots+99) \cdot \log_x 5 = \frac{99 \cdot (99+1)}{2} \cdot \log_x 5 = 4950 \cdot \log_x 5.$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\log_x \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_x \sqrt{\frac{2}{3}} + \ldots + \log_x \sqrt{\frac{99}{100}} = \log_x \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdots \sqrt{\frac{99}{100}}\right) =$$
$$= \log_x \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}} = \log_x \sqrt{\frac{1}{100}} = \log_x \frac{1}{10}.$$

Vagyis:

$$4950 \cdot \log_x 5 + \log_x 0{,}1 = 4950 \cdot \frac{\lg 5}{\lg x} - \frac{1}{\lg x} = \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x}.$$

Mivel $\frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x}$ egészekre kerekített értéke 2540, azért $2539{,}5 < \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{\lg x} < 2541{,}5$, amiből következik az is, hogy $\lg x$ pozitív. Átrendezés után:

$$1{,}360 < \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{2541{,}5} < \lg x \le \frac{4950 \cdot \lg 5 - 1}{2539{,}5} < 1{,}363.$$

Mivel a 10-es alapú exponenciális függvény növekedő függvény, azért az egyenlőtlenségek iránya nem változik: $22{,}9 < x < 23{,}07$.

Egyetlen egész tesz eleget a feladat követelményeinek, mégpedig a 23.

4. *Adjuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények legbővebb értelmezési tartományát és a hozzátartozó értékkészletet, ha mindkét halmaz csak egész számokból áll:*

$$a)\quad f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+7}}; \qquad b)\quad g(x) = \left|\frac{5-x}{x+7}\right|.$$

(14 pont)

Megoldás. *a*) A négyzetgyök miatt $\frac{5-x}{x+7} \ge 0$, vagyis $x \in]-7;5]$. Mivel x egész szám, ezért az intervallumot tovább kell szűkítenünk: $x \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$. Ezek közül csak azok a számok maradhatnak, amelyekre $f(x)$ is egész. A tizenkét számot könnyen ellenőrizhetjük és két lehetőséget kapunk: $f(-1) = 1$, $f(5) = 0$.

Vagyis az $f(x)$ értelmezési tartománya: $x \in \{-1;5\}$, az értékkészlete: $f(x) \in \{0;1\}$.

b) A nevező miatt: $x \neq -7$. Ezen túl csak azok az egész számok maradhatnak, amelyekre $g(x)$ is egész. Végezzük el a következő átalakítást:

$$g(x) = \left|\frac{5-x}{x+7}\right| = \left|\frac{-(x+7)+12}{x+7}\right| = \left|-1 + \frac{12}{x+7}\right|.$$

Ez csak akkor lehet egész szám, ha $-1 + \frac{12}{x+7}$ egész, azaz $x+7$ osztója a 12-nek. Ezek alapján a megfelelő értékeket táblázatban rögzítettük.

$x+7$	-12	-6	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	12
x	-19	-13	-11	-10	-9	-8	-6	-5	-4	-3	-1	5
$g(x)$	2	3	4	5	7	13	11	5	3	2	1	0

Vagyis a $g(x)$ értelmezési tartománya: $x \in \{-19;-13;-11;-10;-9;-8;-6;-5;-4;-3;-1;5\}$, az értékkészlete: $g(x) \in \{0;1;2;3;4;5;7;11;13\}$.

II. rész

5. *Az $f(x)$ egy másodfokú függvény, a $g(x)$ pedig egy lineáris törtfüggvény. Tudjuk, hogy $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = -1$, $f(3) = 3$, a $g(3)$ pedig nem értelmezhető.*

a) Határozzuk meg az $f(44)$ értékét.

b) Határozzuk meg a $g(9)$ értékét.

c) Hány megoldása lehet az $f(x) = g(x)$ egyenletnek? Adjuk meg a gyököket.

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ hozzárendelésű másodfokú függvény. Tudjuk, hogy $f(0) = c = 0$, $f(1) = a + b = -1$, $f(3) = 9a + 3b = 3$. Az így kapott egyenletrendszer megoldása: $a = 1$, $b = -2$, azaz $f(x) = x^2 - 2x$. Vagyis $f(44) = 44^2 - 2 \cdot 44 = 1848$.

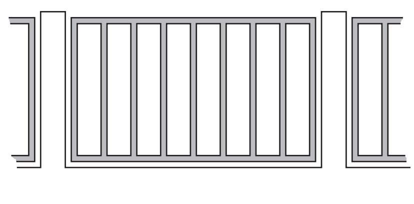
b) Legyen $g(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ hozzárendelésű lineáris törtfüggvény ($c \neq 0$). Tudjuk, hogy $g(0) = \dfrac{b}{d} = 0$, ezért $b = 0$. Tudjuk, hogy $g(3)$ nincs értelmezve, vagyis $g(x) = \dfrac{ax}{cx - 3c}$. Tudjuk továbbá, hogy $g(1) = \dfrac{a}{c - 3c} = \dfrac{a}{-2c} = -1$, azaz $a = 2c$. Mindent összevetve:

$$g(x) = \frac{2cx}{cx - 3c} = \frac{2x}{x - 3}, \quad \text{vagyis} \quad g(9) = \frac{2 \cdot 9}{9 - 3} = 3.$$

c) Keressük az összes valós x értéket, amelyre $f(x) = g(x)$, vagyis keressük az $x^2 - 2x = \dfrac{2x}{x - 3}$ egyenlet megoldásait. $(x - 3)$-mal szorozhatunk ($x \neq 3$). Mivel harmadfokú egyenletet kapunk, ezért legfeljebb három megoldást kaphatunk. A műveletek elvégzése és a rendezés után: $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$. A bal oldalon álló kifejezést szorzattá alakíthatjuk: $x(x - 1)(x - 4) = 0$.

Vagyis az egyenlet gyökei: 0, 1, 4.

6. *Az* ábrán *látható szürkére festett vaskerítés nyolc egymás melletti résén szeretnénk átdobni egy kislabdát. A kerítés* 4 cm *széles vasrudakból készült. Egy kerítéselem szélessége* 164 cm*, magassága* 78 cm *, a labda átmérője* 8 cm. *Dobásunk véletlenszerűnek tekinthető, de a kerítéselem téglalapját biztosan eltaláljuk (a labda középpontjával).*



1. ábra

a) Mekkora valószínűséggel tudjuk átdobni a labdát a kerítés résein úgy, hogy az ne érintkezzen a kerítéssel?

b) Mekkora labda esetén lesz ez a valószínűség 0,5*?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az adatok alapján egy rés mérete 70 cm-szer 16 cm-es téglalap. A labda középpontja ezektől a határvonalaktól legalább 4 cm-re kell, hogy legyen, mert egyébként a labda nekiütközik a vasnak. Vagyis a labda középpontja egy 62 cm-szer 8 cm-es téglalapon haladhat át.

A kerítés elem teljes területe: $T = 78 \cdot 164 = 12\,792$ (cm^2). A kedvező rész területe: $t = 8 \cdot 62 \cdot 8 = 3968$ (cm^2). A keresett valószínűség:

$$p(\text{jó dobás}) = \frac{3968}{12\,792} \approx 0{,}31.$$

Vagyis kb. 0,31 valószínűséggel tudjuk átdobni a labdát a kerítés résein.

b) Legyen a labda sugara x cm. Egy rés mérete 70 cm-szer 16 cm-es téglalap. A labda középpontja ezektől a határvonalaktól legalább x cm-re kell, hogy legyen. A labda középpontja egy $(70-2x)$ cm-szer $(16-2x)$ cm-es téglalapon haladhat át. A kerítés elem teljes területe: $T = 12\,792$ cm^2. Most a kedvező rész területe: $t = 8(70 - 2x)(16 - 2x)$ cm^2. A keresett valószínűség:

$$p(\text{jó dobás}) = \frac{8(70 - 2x)(16 - 2x)}{12\,792} = 0{,}5,$$

$$(70 - 2x)(16 - 2x) = 799{,}5,$$

$$4x^2 - 172x + 320{,}5 = 0,$$

$$x_{1;2} = \frac{172 \pm \sqrt{172^2 - 5128}}{8} \approx \begin{cases} 41{,}05, \\ 1{,}95. \end{cases}$$

Mivel egy rés 16 cm széles, ezért a labda sugara nem lehet nagyobb, mint 8 cm. Vagyis a labda sugara csak az x_2 lehet. Ezek alapján a labda átmérője milliméter pontossággal: 3,9 cm.

7. *Adott a koordinátarendszerben az $S(-1;3)$ és az $L(9;3)$ pont.*

a) Adjuk meg azokat a Z pontokat koordinátáikkal, amelyekre az SZL háromszög derékszögű és a területe 20.

b) Adjuk meg azoknak a $Z(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre $SZ^2+LZ^2=68$.

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Három eset lehetséges.

I. eset: a derékszög az S csúcsnál található. Mivel $SL=10$, ezért $SZ=4$, hiszen így lesz a háromszög területe 20. Azaz két megfelelő pont létezik: $Z_1(-1;7)$, $Z_2(-1;-1)$.

II. eset: a derékszög az L csúcsnál van. Az előző esethez hasonlóan kapjuk a következő két pontot: $Z_3(9;7)$, $Z_4(9;-1)$.

III. eset: a derékszög a Z csúcsnál helyezkedik el. Ekkor a keresett pontok az SL átmérőjű Thalész-körre illeszkednek, továbbá az SL egyenestől 4 egységre párhuzamosan futó egyenesre. Ilyen egyenes kettő van, azaz még négy megfelelő pontot találunk. A Thalész-kör egyenlete: $(x-4)^2+(y-3)^2=25$, a két egyenes egyenlete pedig $y=7$, illetve $y=-1$. Ezek alapján a négy pont: $Z_5(1;7)$, $Z_6(1;-1)$, $Z_7(7;7)$, $Z_8(7;-1)$.

Vagyis nyolc megfelelő Z pont található.

b) Írjuk fel a két pont távolságára ismert összefüggést:

$$\begin{gathered}SZ^2+LZ^2=\left[(x+1)^2+(y-3)^2\right]+\left[(x-9)^2+(y-3)^2\right]=68,\\ x^2+2x+1+y^2-6y+9+x^2-18x+81+y^2-6y+9=68,\\ x^2-8x+y^2-6y=-16,\\ (x-4)^2+(y-3)^2=9.\end{gathered}$$

A keresett ponthalmaz a $K(4;3)$ középpontú, $r=3$ sugarú kör.

8. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}+\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}+\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{3\sqrt2+2}{2\sqrt2}.$$

(*16 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ minden x-re, ezért ennyivel csökkenthetjük mindkét oldal értékét:

$$\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}+\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\sqrt2+2}{2\sqrt2}.$$

A négyzetgyök alatti kifejezéseket átalakítjuk:

$$\begin{aligned}A&=\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-\frac34\sin^2 2x,\\ B&=\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac12\sin^2 2x.\end{aligned}$$

Mivel $0\le\sin^2 2x\le1$, ezért $\frac14\le A\le1$ és $\frac12\le B\le1$.

Az egyenlet bal oldalán lévő két négyzetgyökös kifejezés minimumértékének összege: $\sqrt{\frac14}+\sqrt{\frac12}$, ami $\frac{\sqrt2+2}{2\sqrt2}$ alakban is írható. Vagyis egyenletünknek akkor van megoldása, ha mindkét négyzetgyökös kifejezés a minimumértéket veszi fel. Ez csak a $\sin^2 2x=1$ esetén valósul meg, azaz $\sin 2x=1$ vagy $\sin 2x=-1$. Ebből kapjuk, hogy $2x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$. Tehát az egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

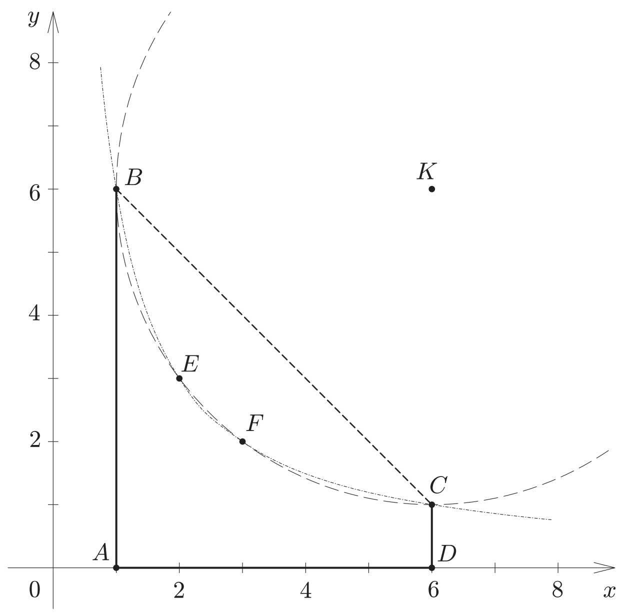
9. *Az $A(1;0)$, $B(1;6)$, $C(6;1)$, $D(6;0)$ pontok által meghatározott négyszög BC oldalát először helyettesítsük a $K(6;6)$ középpontú és $r=5$ sugarú kör B és C közötti rövidebb ívével, másodszor pedig az $f(x)=\frac{6}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjának a B és C közötti darabjával.*

a) Határozzuk meg mindkét esetben az $ABCD$ síkidom területét. Melyik a nagyobb?

b) Adjuk meg a B és C pontokat összekötő két görbe vonal közös pontjainak koordinátáit. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első esetben az $ABKD$ téglalapból hiányzik egy K középpontú, $r=5$ sugarú negyedkör. Vagyis ebben az esetben a terület:

$$T_1=5\cdot6-\frac{5^2\cdot\pi}{4}=\frac{120-25\pi}{4}\approx10{,}365.$$



A második esetben a területet a következő integrállal számíthatjuk ki:

$$T_2 = \int_1^6 \frac{6}{x}\,dx = 6 \cdot \int_1^6 \frac{1}{x}\,dx = 6 \cdot \big[\ln|x|\big]_1^6 = 6 \cdot (\ln 6 - \ln 1) = 6 \cdot \ln 6 \approx 10{,}751.$$

Vagyis a második esethez tartozó síkidom területe a nagyobb 0,386-del.

b) Az első esethez tartozó körív egyenlete: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$. A BC húrhoz tartozó rövidebb körív, mint grafikon, a következő függvényhez tartozik:

$$g(x) = 6 - \sqrt{25 - (x-6)^2}, \quad \text{ahol} \quad x \in [1;6].$$

A második esetben az $f(x) = \dfrac{6}{x}$ hozzárendelésű függvényről van szó, ahol $x \in [1;6]$. A feladat az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldása az $[1;6]$ intervallumon:

$$\frac{6}{x} = 6 - \sqrt{25 - (x-6)^2}.$$

A vizsgált intervallumon végezzük el a következő átalakításokat:

$$\sqrt{25 - x^2 + 12x - 36} = 6 - \frac{6}{x},$$
$$x\sqrt{-x^2 + 12x - 11} = 6x - 6,$$
$$x^2\big(-x^2 + 12x - 11\big) = 36x^2 - 72x + 36,$$
$$0 = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36.$$

A feladat szövegéből következik, hogy az $x_1 = 1$, valamint az $x_2 = 6$ megoldása az egyenletnek (hiszen mindkét görbére illeszkedik a B és a C pont). Ezért az egyenlet a következő alakban is írható: $0 = (x-1)(x-6)\big(x^2+ax+b\big)$. Végezzük el a szorzásokat, az együtthatókat összehasonlítva az előbb kapott negyedfokú egyenlet megfelelő együtthatóival kapjuk, hogy $b = 6$, $a = -5$. Vagyis

$$0 = (x-1)(x-6)\big(x^2 - 5x + 6\big) = (x-1)(x-6)(x-2)(x-3).$$

További két megoldás: $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Tehát a $B(1;6)$ és a $C(6;1)$ pontok mellett még két közös pontja van a két görbének: $E(2;3)$, $F(3;2)$.