I. rész

1. *A királyfi Csipkerózsikához sietett a toronyba. Először egyesével, majd kettesével, végül már hármasával vette a lépcsőfokokat a 232 fokos csigalépcsőn. Ha az elején lépett volna hármasával, majd kettesével, végül egyesével rendre ugyanennyit, akkor egy 276 fokos lépcsősor tetejére is feljuthatott volna.*

a) Mennyit lépett a királyfi, míg felért a lépcső tetejére?

b) Hány lépcsőt lépett egyesével, ha kettesével másfélszer annyit lépett, mint hármasával? (*10 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az egyesével tett lépések száma x, a kettes lépéseké y, a hármasoké z. A feladat szövege szerint:

$$x + 2y + 3z = 232, \quad 3x + 2y + z = 276.$$

Adjuk össze a két egyenletet, és osszunk 4-gyel: $x + y + z = 127$. Vagyis 127 lépéssel ért fel a lépcső tetejére.

b) Tudjuk, hogy $y = 1{,}5z$. A három ismeretlenre így már három egyenletünk van. Ennek megoldása: $x = 52$, $y = 45$, $z = 30$. Tehát a királyfi 52 lépcsőt lépett egyesével.

2. *Három kétjegyű prímszám egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Az összegük olyan háromjegyű szám, melyben a számjegyek egy növekvő számtani sorozat három egymást követő tagját adják. A számjegyek közötti különbségnek a másfélszerese a prímszámok közötti különbség. Melyik ez a három prímszám?* (*13 pont*)

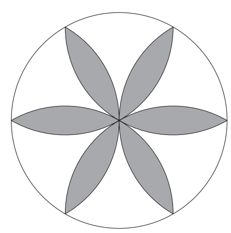
Megoldás. Mivel a prímszámok kétjegyűek, így az összegük 300-nál kisebb, és tudjuk, hogy a számjegyek is számtani sorozatot alkotnak. Ilyen háromjegyű számok a következők: 123, 135, 147, 159, 234, 246, 258. Az összeg harmada adja a középső prímszámot. A harmadolás után csak két esetben kapunk prímszámot: 123, 159.

I. eset: Ha az összeg 123, akkor a középső prímszám a 41. Mivel a számjegyek különbsége 1, ezért a prímeknél 1,5 lesz a különbség. Ezek alapján nem kapunk egész számokat.

II. eset: Ha az összeg 159, akkor a középső prímszám az 53. Mivel a számjegyek különbsége 4, ezért a prímeknél 6 lesz a különbség.

Ezek alapján a három szám: 47, 53, 59, és ezek mindegyike prímszám, vagyis megfelel a feladat feltételeinek.

3. *Bori a körzőjével hatszirmú virágot szerkesztett az* ábrán *látható módon, majd kiszínezte.*



a) Mekkorára nyitotta a körzőjét Bori, ha a hatszirmú virág határvonalának hossza 18π *cm-ben?*

b) A kör területének hány százalékát színezte ki? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kör sugara r, ekkor kerülete $K = 2r\pi$. A virág egy szirmának egyik íve a kör 60°-os középponti szögéhez tartozó ív hosszával egyenlő, tehát a kör kerületének hatoda. A virág 12 db ugyanekkora ívből áll. Tehát összesen a kör kerületének kétszerese a virág határvonalának hossza, azaz: $2K = 4r\pi = 18\pi$. Ebből $r = 4{,}5$.

Vagyis 4,5 cm-re nyitotta ki Bori a körzőjét.

b) A kör területe: $T = r^2\pi$. A virág egy szirmának (a kör sugara által levágott) fele a kör 60°-os középponti szögéhez tartozó körszelet. A körszelet ívének hossza: $i = \dfrac{2r\pi}{6} = \dfrac{r\pi}{3}$.

$$T_{\text{körszelet}} = \frac{ir}{2} - \frac{r^2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{\frac{r\pi}{3} r}{2} - \frac{r^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r^2}{12}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right),$$

$$T_{\text{virág}} = 12 \cdot T_{\text{körszelet}} = r^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right),$$

$$\frac{T_{\text{virág}}}{T} = \frac{r^2\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)}{r^2\pi} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\pi} \approx 0{,}346.$$

Tehát kb. a kör 34,6%-át színezte ki Bori.

4. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\log_5(x-2) + \log_{25}\left(4x^3 + 29x^2 + 16x\right) = \log_5\left(x^3 - 8\right). \qquad (14\ pont)$$

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x > 2$. A logaritmus azonosságait és a logaritmus függvény kölcsönös egyértelműségét felhasználva:

$$\begin{aligned}
\frac{\log_5(4x^3+29x^2+16x)}{\log_5 25} &= \log_5(x^3-8)-\log_5(x-2),\\
\frac{\log_5(4x^3+29x^2+16x)}{2} &= \log_5(x^2+2x+4),\\
\log_5(4x^3+29x^2+16x) &= \log_5\left(x^2+2x+4\right)^2,\\
4x^3+29x^2+16x &= x^4+4x^3+12x^2+16x+16,\\
0 &= x^4-17x^2+16.
\end{aligned}$$

Ez x^2-re másodfokú egyenlet, a gyökök: $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-4$, $x_4=4$, melyek közül csak az $x=4$ a megoldás az értelmezési tartomány miatt.

II. rész

5. *Adott a síkon* 2011 *egyenes, melyek között nincsenek párhuzamosok, továbbá* 1011 *egyenes átmegy a sík* P *pontján. A* P*-n kívül a sík egyetlen pontjára sem illeszkedik kettőnél több egyenes.*

a) Hány metszéspontja van a 2011 *egyenesnek?*

b) Mekkora valószínűséggel van 3 *véletlenszerűen választott egyenesnek közös pontja?*

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 3 *véletlenszerűen választott egyenes egy háromszög három oldalegyenese?*

d) Az egyenesek közül kiválasztunk ötöt. Az általuk meghatározott tartományokat kiszínezzük a lehető legkevesebb színnel úgy, hogy az élben szomszédos részek ne legyenek azonos színűek. Hány színre lesz szükségünk? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A 2011 darab egyenesnek $\binom{2011}{2}$ metszéspontja lehet maximálisan. Most ebből 1011 egyenesnek az $\binom{1011}{2}$ metszéspontja helyett csak egy metszéspont van. Ezek szerint a metszéspontok száma: $\binom{2011}{2}-\binom{1011}{2}+1=$ 1 510 501.

A feltételeknek megfelelő 2011 darab egyenesnek 1 510 501 metszéspontja van.

b) Véletlenszerűen választunk három egyenest, ekkor az összes lehetőségek száma: $\binom{2011}{3}$. Csak az a kedvező, ha az 1011-ből választunk hármat. A kedvező esetek száma: $\binom{1011}{3}$.

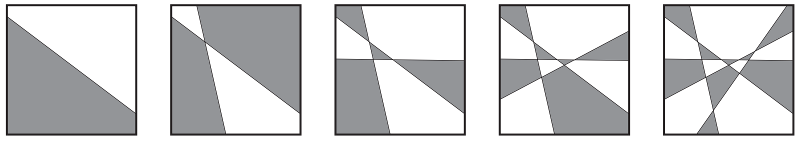
A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{1011}{3}}{\binom{2011}{3}} \approx 0{,}127.$$

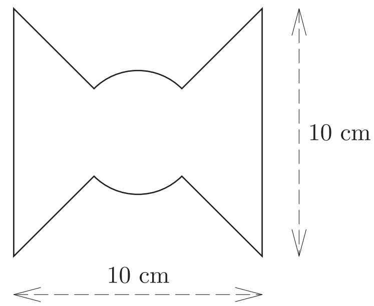
c) Mivel közülük semelyik kettő nem párhuzamos, azért ha a három egyenes nem egy pontban metszi egymást, akkor háromszöget határoznak meg.

Tudjuk, hogy a véletlenszerűen választott három egyenes kb. 0,127 valószínűséggel metszi egy pontban egymást, ezért annak valószínűsége, hogy a három egyenes egy háromszög három oldalegyenese lesz, 0,873.

d) Egy egyenes a síkot két részre osztja, ekkor két szín biztosan elég a színezéshez. Ezután egy újabb egyenes hozzávételekor mindig az egyik félsík összes darabjának színét ellenkezőjére változtatjuk, így biztosítva, hogy a szomszédos területek továbbra is különböző színűek maradjanak. Tehát a színezéshez két szín elég.



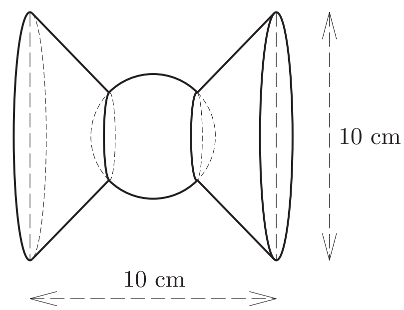
6. *Egy esztergályos megrendelést kapott forgásszimmetrikus díszítőelemek készítésére. A megrendelő az* ábrán *látható tengelymetszetet adta le, de elfelejtette bejelölni a forgástengelyt.*



A díszítőelemeket olyan hengerből kell elkészíteni, amelyek átmérője és magassága is 10 cm, *a kész elem közepén látható gömb átmérője pedig* 5 cm. *Az esztergályos mindkét lehetséges változatból elkészített egy-egy mintapéldányt. Hány százalék a hulladék az egyes esetekben?* (*16 pont*)

I. megoldás. Mindkét esetben ugyanakkora a kiindulásnak vett henger térfogata: $V_{\text{henger}} = 5^2\pi \cdot 10 = 250\pi \approx 785{,}40$, és a gömb térfogata:

$$V_{\text{gömb}} = \frac{4\pi}{3}2{,}5^3 = \frac{62{,}5\pi}{3} \approx 65{,}45.$$

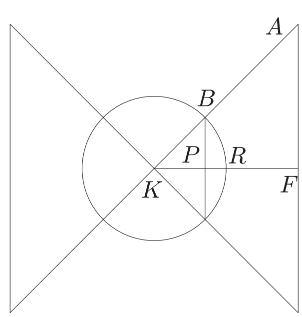


1. eset: A forgástengely vízszintes. Ennek a változatnak a térfogata:

$$V_1 = 2V_{\text{csonkakúp}} + V_{\text{gömb}} - 2V_{\text{gömbszelet}}.$$

A csonkakúp alapkörének sugara megegyezik a henger sugarával, vagyis 5 cm. Meg kell határoznunk a magasságának és a fedőkör sugarának a hosszát.

Használjuk a keresztmetszetről készített *ábra* jelöléseit.



A KPB és a KFA egyenlőszárú derékszögű háromszögek, ezért hasonlók. Tudjuk, hogy $AF = 5$, $KA = 5\sqrt{2}$, $KB = 2{,}5$, így a megfelelő oldalak aránya: $\dfrac{BP}{2{,}5} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}}$. Ebből kapjuk a csonkakúp fedőkörének sugarát: $BP = 1{,}25\sqrt{2}$. A háromszögek egyenlőszárúságát felhasználva a csonkakúp magassága is kifejezhető: $PF = KF - KP = 5 - 1{,}25\sqrt{2}$.

A csonkakúp térfogata:

$$V_{\text{csonkakúp}} = \frac{\pi}{3}\big(5 - 1{,}25\sqrt{2}\big)\big[5^2 + 5\big(1{,}25\sqrt{2}\big) + \big(1{,}25\sqrt{2}\big)^2\big] \approx 125{,}11.$$

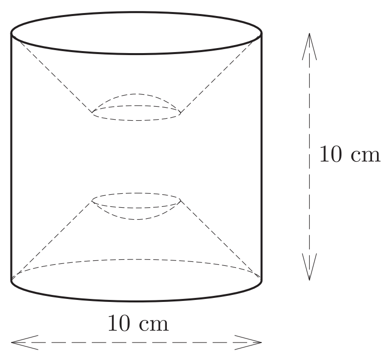
A gömb sugara: $KB = 2{,}5$, a gömbszelet magassága: $PR = KR - KP = 2{,}5 - 1{,}25\sqrt{2}$. A gömbszelet térfogata:

$$V_{\text{gömbszelet}} = \frac{\pi}{3}\big(2{,}5 - 1{,}25\sqrt{2}\big)^2\big[3 \cdot 2{,}5 - \big(2{,}5 - 1{,}25\sqrt{2}\big)\big] \approx 3{,}80.$$

A kapott eredmények felhasználásával:

$$V_1 = 2V_{\text{csonkakúp}} + V_{\text{gömb}} - 2V_{\text{gömbszelet}} = 2 \cdot 125{,}11 + 65{,}45 - 2 \cdot 3{,}80 = 308{,}07,$$
$$\frac{V_1}{V_{\text{henger}}} = \frac{308{,}07}{785{,}40} \approx 0{,}3922.$$

Tehát az első esetben az anyagveszteség kb. 60,78%-os.



2. eset: A forgástengely függőleges. Ennek a változatnak a térfogata:

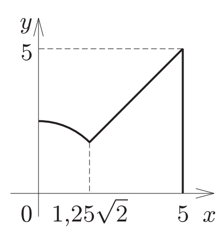
$$V_2 = V_{\text{henger}} - 2V_{\text{csonkakúp}} + 2V_{\text{gömbszelet}}.$$

Az előző rész eredményeit felhasználva:

$$V_2 = V_{\text{henger}} - 2V_{\text{csonkakúp}} + 2V_{\text{gömbszelet}} = \\ = 785{,}40 - 2 \cdot 125{,}11 + 2 \cdot 3{,}80 = 542{,}78,$$
$$\frac{V_2}{V_{\text{henger}}} = \frac{542{,}78}{785{,}40} = 0{,}6911.$$

Tehát a második esetben az anyagveszteség 30,89%-os.

II. megoldás. *1. eset:* A forgástengely vízszintes.



A kör egyenlete: $x^2 + y^2 = 6{,}25$ (ahol $0 \le x, y \le 2{,}5$), ebből $y = \sqrt{6{,}25 - x^2}$. Az egyenes egyenlete: $y = x$. A kör és az egyenes metszéspontja: $\left(1{,}25\sqrt{2}; 1{,}25\sqrt{2}\right)$.

A forgástest térfogatát integrállal határozzuk meg:

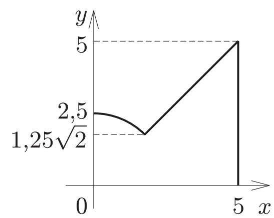
$$V_1 = 2\pi\left(\int_0^{1{,}25\sqrt{2}} (6{,}25 - x^2)\,dx + \int_{1{,}25\sqrt{2}}^{5} x^2\,dx\right) =$$
$$= 2\pi\left(\left[6{,}25x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1{,}25\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1{,}25\sqrt{2}}^{5}\right) =$$
$$= 2\pi\left(6{,}25 \cdot 1{,}25\sqrt{2} - \frac{\left(1{,}25\sqrt{2}\right)^3}{3} + \frac{5^3}{3} - \frac{\left(1{,}25\sqrt{2}\right)^3}{3}\right) \approx 308{,}08.$$

Az eredeti henger térfogata: $V_{\text{henger}} = 5^2\pi \cdot 10 = 250\pi \approx 785{,}40$.

$$\frac{V_1}{V_{\text{henger}}} = \frac{308{,}08}{785{,}40} \approx 0{,}3922.$$

Tehát az első esetben az anyagveszteség kb. 60,78%-os.

II. eset: A forgástengely függőleges.



A forgástest térfogatát integrállal határozzuk meg:

$$V_2 = 2\pi\left(\int_0^5 25\,dy - \int_{1,25\sqrt{2}}^5 y^2\,dy + \int_{1,25\sqrt{2}}^{2,5} (6{,}25 - y^2)\,dy\right) =$$

$$= 2\pi\left(\left[25y\right]_0^5 - \left[\frac{y^3}{3}\right]_{1,25\sqrt{2}}^5 + \left[6{,}25y - \frac{y^3}{3}\right]_{1,25\sqrt{2}}^{2,5}\right) =$$

$$= 2\pi\left(25\cdot 5 - \frac{5^3}{3} + \frac{\left(1{,}25\sqrt{2}\right)^3}{3} + 6{,}25\cdot 2{,}5 - \frac{2{,}5^3}{3} - 6{,}25\cdot 1{,}25\sqrt{2} + \frac{\left(1{,}25\sqrt{2}\right)^3}{3}\right) \approx$$

$$\approx 542{,}77.$$

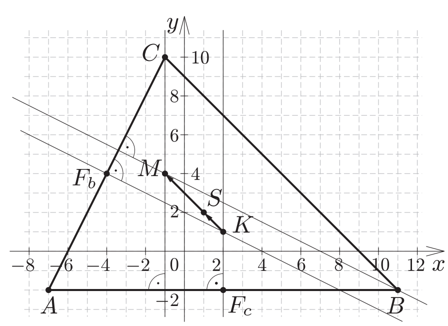
Az eredeti henger térfogata: $V_{\text{henger}} \approx 785{,}40$.

$$\frac{V_2}{V_{\text{henger}}} = \frac{542{,}77}{785{,}40} \approx 0{,}6911.$$

Tehát a második esetben az anyagveszteség kb. 30,89%-os.

7. *Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-7;-2)$, $B(11;-2)$, $C(-1;10)$.*
a) Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található K pont koordinátáit.
b) Adjuk meg a háromszög M magasságpontjának koordinátáit.
c) Igazoljuk számítással, hogy az ABC háromszögben az S súlypont harmadolja az MK szakaszt. (*16 pont*)

Megoldás. A megoldás során a mellékelt *ábra* jelöléseit használjuk.



a) A K pont az oldalfelező merőlegesek metszéspontjában található. Írjuk fel a c oldalhoz tartozó f_c felezőmerőleges egyenletét. Ennek az egyenesnek egyik pontja az AB oldal felezőpontja: $F_c(2;-2)$. Mivel a c oldal párhuzamos az x tengellyel, azért az f_c egyenes az y tengellyel lesz párhuzamos, így egyenlete: $x = 2$.

Írjuk fel a b oldalhoz tartozó f_b felezőmerőleges egyenletét is. Ennek az egyenesnek egyik pontja az AC oldal felezőpontja: $F_b(-4;4)$. Az f_b egyenes egy normálvektora: $\overrightarrow{AC}(6;12)$, aminek számolhatunk a hatodával. Vagyis az f_b egyenes egyenlete: $x + 2y = 1\cdot(-4) + 2\cdot 4$, amiből $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$. Az f_c és f_b egyenesek egyenletéből kapjuk: $K(2;1)$.

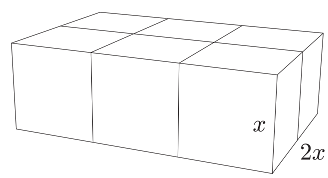
b) Az M magasságpont a háromszög magasságainak metszéspontja. Írjuk fel a c oldalhoz tartozó m_c magasság egyenesének egyenletét. Ennek egyik pontja $C(-1;10)$, és merőleges a c oldalra, ezért egyenlete: $x = -1$.

Írjuk fel a b oldalhoz tartozó m_b magasság egyenesének egyenletét. Ennek egyik pontja $B(11;-2)$, és merőleges a b oldalra, tehát normálvektora megegyezik az oldalfelező merőleges normálvektorával. Vagyis az m_b egyenes egyenlete: $x + 2y = 1\cdot 11 + 2\cdot(-2)$, amiből: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Az m_c és m_b egyenesek egyenletéből kapjuk: $M(-1;4)$.

c) A súlypont koordinátáit a csúcspontok megfelelő koordinátáinak számtani közepe adja, vagyis: $S(1;2)$. Mivel $M(-1;4)$ és $K(2;1)$, ezért $\overrightarrow{MS}(2;-2)$, illetve $\overrightarrow{SK}(1;-1)$. A két vektorra: $\overrightarrow{MS}=2\overrightarrow{SK}$, tehát az S pont az MK szakasz K végpontjához közelebbi harmadolópont.

8. *Anna ajándékba olyan* $56\ \mathrm{dm}^3$ *térfogatú csomagot kapott, melynek csomagolásához (az* ábrán *látható módon) a lehető legkevesebb zsineget használták. Mekkora a téglatest alakú doboz éleinek hossza, ha az egyik alapélének hossza egyenlő a magasság kétszeresével az* ábra *szerint?* (*16 pont*)



Megoldás. A téglatest élei legyenek x, $2x$, y. A zsineg hosszúsága a téglatest éleinek függvényében: $l(x,y)=6x+4\cdot 2x+2y=14x+2y$, ahol $x,y>0$.

Az ajándék térfogata: $V=56=2x^2y$. Ebből kifejezzük y-t: $y=\dfrac{28}{x^2}$, és behelyettesítjük a zsineg hosszúságát leíró függvénybe:

$$l(x)=14x+2y=14x+\frac{56}{x^2},$$

ahol $x>0$. Ennek a függvénynek keressük a minimumát.

Az l függvény deriváltja:

$$l'(x)=14-\frac{112}{x^3}.$$

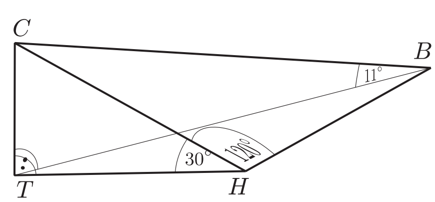
Az l függvénynek ott lehet minimuma, ahol a derivált függvény értéke nulla, azaz: $14-\dfrac{112}{x^3}=0$, ebből $x=2$. Mivel itt a derivált negatívból pozitívba vált, ezért ezen a helyen a függvénynek valóban minimuma van.

Ezt visszahelyettesítve kapjuk a doboz éleinek hosszát: 2 dm, 4 dm és 7 dm.

9. *Az azonos tengerszint feletti magasságban fekvő Hencida és Boncida között a távolság* 5 km. *Hencidából egy közeli hegy csúcsa* $30°$*-os, Boncidából pedig* $11°$*-os szögben látszik. Hencidából a hegy csúcsát és Boncidát összekötő szakasz látószöge* $120°$*-os.*

a) *Mennyivel van magasabban a hegy csúcsa a két város szintjéhez képest?*

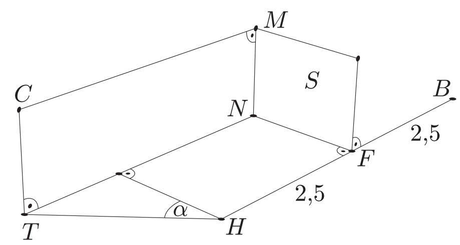
b) *A két várost összekötő egyenes út felénél felröppen egy madár. Röppályájának minden pontja egyenlő távolságra van a két várostól. Mennyire közelítheti meg röpülés közben a hegy csúcsát?* (*16 pont*)



Megoldás. *a*) Az *ábrán* látható jelöléseket használjuk. A hegy magassága x. A CTH derékszögű háromszögben $\sin 30°=\dfrac{x}{a}$, ebből $a=2x$. Ugyanígy a CTB derékszögű háromszögben $\sin 11°=\dfrac{x}{b}$, ebből $b=\dfrac{x}{\sin 11°}\approx 5{,}24x$. Írjuk fel a CHB háromszögben a koszinusztételt a b oldalra, majd helyettesítsük be az imént kapott összefüggéseket:

$$\begin{aligned}b^2&=a^2+5^2-2\cdot a\cdot 5\cdot\cos 120°,\\(5{,}24x)^2&=(2x)^2+25-2\cdot 2x\cdot 5\cdot(-0{,}5),\\27{,}4576\,x^2&=4x^2+25+10x,\\23{,}4576\,x^2-10x-25&=0.\end{aligned}$$

Ebből: $x_1\approx -0{,}841$ (ami nem megoldás, mert a magasság csak pozitív lehet), $x_2\approx 1{,}267$. Tehát a hegy 1267 méter magas.



b) A madár (M) rajta van a HB szakasz S felezőmerőleges síkján, a hegy csúcsának magasságában. Helyzetét az *ábra* szemlélteti. A keresett távolság MC, ennek a vízszintes szakasznak a vízszintes síkra eső merőleges vetülete TN, és ez a $TNFH$ derékszögű trapéz hosszabbik alapja lesz. A TP szakasz hosszát a TPH derékszögű háromszögben számítjuk ki. A látószögek felhasználásával a THC és a TBC derékszögű háromszögekben:

$$TH = \frac{x}{\operatorname{tg} 30^\circ} \approx 2{,}195 \quad \text{és} \quad TB = \frac{x}{\operatorname{tg} 11^\circ} \approx 6{,}518.$$

A THB háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$6{,}518^2 = 2{,}195^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2{,}195 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ),$$

ebből $\cos(\alpha + 90^\circ) \approx -0{,}5771$, azaz $\alpha + 90^\circ \approx 125{,}25^\circ$, vagyis $\alpha = 35{,}25^\circ$, továbbá a TPH háromszögben $TP = TH \cdot \sin\alpha = 2{,}195 \cdot 0{,}5771 \approx 1{,}267$, $TN = TP + PN = 1{,}267 + 2{,}5 = 3{,}767$. Tehát a madár a hegycsúcsot 3767 méterre közelítheti meg.