Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

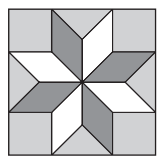
1. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{2x^2-1961x+4000}{x^2-2011x+2010}-\frac{x^2+51x-20}{(x-2010)(x-1)}=0.$$

10pt *(11 pont)*

2. Nagymama konyháját az *ábrán* látható négyzet alakú járólapokkal burkolták. A lap belsejében a mintát alkotó szakaszok mindegyike 5,8 cm hosszú. A nyolc egybevágó rombuszból négy fehér, négy piros, a lap többi része szürke.

a) Adjuk meg egy járólap méretét milliméterre kerekítve.



b) A járólap területének hány százaléka piros, és hány százaléka szürke?

c) Egy járólapot a középpontján át, két fehér rombusz átlója mentén kettévágunk. Milyen hosszú a vágás? *(13 pont)*

3. Határozzuk meg azt a pozitív egész x értéket, amelyre a következő összeg egészekre kerekítve 2540 lesz.

$$\log_x\left(5\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\log_x\left(5^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\log_x\left(5^3\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}\right)+\ldots+\log_x\left(5^{99}\cdot\sqrt{\frac{99}{100}}\right).$$

(13 pont)

4. Adjuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények legbővebb értelmezési tartományát és a hozzátartozó értékkészletet, ha mindkét halmaz csak egész számokból áll:

$$a)\quad f(x)=\sqrt{\frac{5-x}{x+7}};\qquad\qquad b)\quad g(x)=\left|\frac{5-x}{x+7}\right|.$$

(14 pont)

II. rész

5. Az $f(x)$ egy másodfokú függvény, a $g(x)$ pedig egy lineáris törtfüggvény. Tudjuk, hogy $f(0)=g(0)=0$, $f(1)=g(1)=-1$, $f(3)=3$, a $g(3)$ pedig nem értelmezhető.

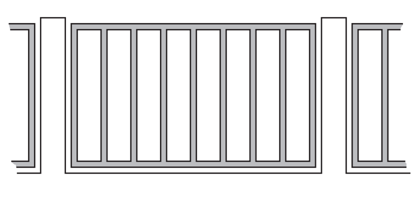
a) Határozzuk meg az $f(44)$ értékét.

b) Határozzuk meg a $g(9)$ értékét.

c) Hány megoldása lehet az $f(x)=g(x)$ egyenletnek? Adjuk meg a gyököket.

(16 pont)

6. Az *ábrán* látható szürkére festett vaskerítés nyolc egymás melletti résén szeretnénk átdobni egy kislabdát. A kerítés 4 cm széles vasrudakból készült. Egy kerítéselem szélessége 164 cm, magassága 78 cm, a labda átmérője 8 cm. Dobásunk véletlenszerűnek tekinthető, de a kerítéselem téglalapját biztosan eltaláljuk (a labda középpontjával).



a) Mekkora valószínűséggel tudjuk átdobni a labdát a kerítés résein úgy, hogy az ne érintkezzen a kerítéssel?

b) Mekkora labda esetén lesz ez a valószínűség 0,5? *(16 pont)*

7. Adott a koordinátarendszerben az $S(-1;3)$ és az $L(9;3)$ pont.

a) Adjuk meg azokat a Z pontokat koordinátáikkal, amelyekre az SZL háromszög derékszögű és a területe 20.

b) Adjuk meg azoknak a $Z(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyekre $SZ^2+LZ^2=68$. (*16 pont*)

8. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}+\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}+\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\frac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}}.$$

(*16 pont*)

9. Az $A(1;0)$, $B(1;6)$, $C(6;1)$, $D(6;0)$ pontok által meghatározott négyszög BC oldalát először helyettesítsük a $K(6;6)$ középpontú és $r=5$ sugarú kör B és C közötti rövidebb ívével, másodszor pedig az $f(x)=\dfrac{6}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjának a B és C közötti darabjával.

a) Határozzuk meg mindkét esetben az $ABCD$ síkidom területét. Melyik a nagyobb?

b) Adjuk meg a B és C pontokat összekötő két görbe vonal közös pontjainak koordinátáit. (*16 pont*)