A 2010. évi WILLIAM LOWELL PUTNAM verseny feladatai[1]

A1. Adott n pozitív egészre melyik az a legnagyobb k, amelyre a $1,2,\ldots,n$ számokat el lehet helyezni k dobozban úgy, hogy minden dobozban ugyanannyi legyen a számok összege? ($n=8$ esetén a $\{1,2,3,6\}$, $\{4,8\}$, $\{5,7\}$ példa mutatja, hogy k *legalább* 3.)

A2. Határozzuk meg az összes olyan differenciálható $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre minden x valós szám és minden n pozitív egész esetén

$$f'(x)=\frac{f(x+n)-f(x)}{n}.$$

A3. Tegyük fel, hogy a $h\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény parciálisan deriválható és a parciális deriváltak folytonosak, továbbá, hogy a függvény valamely a, b konstansok esetén kielégíti a

$$h(x,y)=a\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

egyenletet. Bizonyítsuk be, hogy ha létezik olyan M konstans, amelyre minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ esetén $\left|h(x,y)\right|\le M$, akkor h azonosan egyenlő nullával.

A4. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor $10^{10^{10^n}}+10^{10^n}+10^n-1$ nem prímszám.

A5. Tekintsük a G halmaz és a $*$ művelet által meghatározott csoportot. Tegyük fel, hogy
(i) G részhalmaza $\mathbb{R}^3$-nek (de a $*$ művelet nem szükségképpen kötődik a vektorösszeadáshoz);
(ii) Minden $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$ esetén $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}*\mathbf{b}$ vagy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$ (vagy mindkettő), ahol $\times$ a szokásos $\mathbb{R}^3$-beli vektoriális szorzás művelete.

Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$ esetén $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$.

A6. Az $f\colon [0,\infty)\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton csökkenő folytonos függvényre $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^\infty \frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\,dx$$

divergens.

B1. Létezik-e olyan valós számokból álló $a_1,a_2,a_3,\ldots$ végtelen sorozat, amelyre minden m pozitív egész esetén

$$a_1^m+a_2^m+a_3^m+\cdots=m?$$

B2. Az A, B és C pontok nincsenek egy egyenesen, koordinátáik egész számok, és az AB, AC és BC távolságaik is egészek. Mennyi AB legkisebb lehetséges értéke?

B3. Van 2010 darab $B_1,B_2,\ldots,B_{2010}$ feliratú dobozunk, amelyekben $2010n$ számú golyó van szétosztva, ahol n pozitív egész. A golyókat lépések sorozatával átrendezhetjük a dobozok között. Minden lépésben választunk egy i számot, és a B_i feliratú dobozból *pontosan* i darab golyót áthelyezünk valamelyik másik dobozba. n mely értékeire tudjuk a golyók eredeti elrendezésétől függetlenül elérni, hogy mindegyik dobozban n darab golyó legyen?

B4. Határozzuk meg az összes olyan $p(x)$, $q(x)$ valós együtthatós polinompárt, amelyre

$$p(x)q(x+1)-p(x+1)q(x)=1.$$

B5. Létezik-e olyan szigorúan monoton növekvő $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amelyre $f'(x)=f\big(f(x)\big)$ minden x esetén?

B6. Legyen $n\ge 1$, és legyenek az $n\times n$-es A mátrix elemei valós számok. Az $A^{[k]}$ mátrixot minden k pozitív egészre úgy kapjuk, hogy a mátrix minden elemét k-adik hatványra emeljük. Bizonyítsuk be, hogy ha $k=1,2,\ldots,n+1$ esetén $A^k=A^{[k]}$, akkor minden $k\ge 1$ esetén $A^k=A^{[k]}$.

[1] A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: `http://math.scu.edu/putnam/index.html`, a megoldások a `http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` honlapon találhatók.