Nyomozás a Spirál-családban

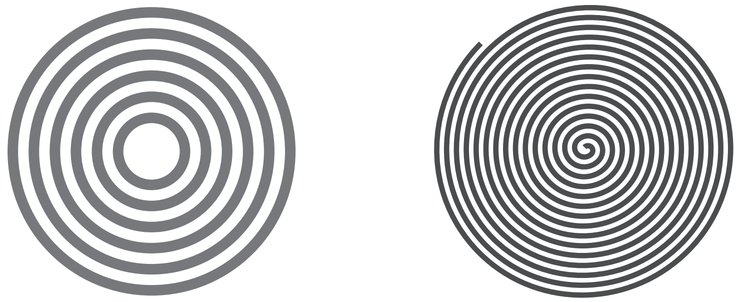
1. Bevezetés

Ezen cikk a spirálok világában való eligazodásban nyújthat segítséget: megkísérli kitisztítani a néhol hallható és olvasható fogalomzavarokat, a felületességből eredő homályos, összemosó, sőt hibás kijelentéseket.

Kalandra hívja az olvasót: rendszerezzük mind történetileg, mind matematikailag a legfontosabb spirálokat, és – ha kedvünk van hozzá – találjunk ki magunk is hasonlót, vagy leljünk örömet megrajzolásukban, szerkesztésükben. Végül – legmélyebben fekvő „szeletként" – fényt derítünk a címben ígért rokonságra.

2. A kezdetek

A *kozmosz* legősibb megjelenítése (például a hinduizmusban vagy egyes indián törzseknél) különböző alakzatokkal történt (*1. ábra*).



1. ábra

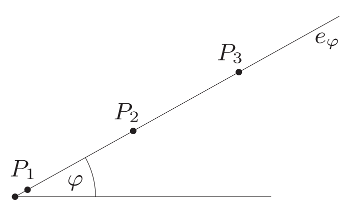
Mindkettőnél a „nem látható" közép a *lényeget,* a bármeddig tágíthatóság pedig a *világegyetem végtelenérzetét* jelképezi. Geometriailag azonban *lényegesen* különböznek egymástól. Az *1. ábra* jobboldali alakzata nem koncentrikus körökből áll, hanem spirál: síkbeli folytonos görbe.

Nemcsak szimbólumként, hanem a matematikai megközelíthetőség tárgyaként is vissza-visszatérnek az évszázadok során a spirálok. Kr.e. 225-ből való *Arkhimédész* leírása arról a fajta spirálról, amely azóta is az ő nevét viseli.

Mai terminológiát használva az *arkhimédészi spirál* egy polárkoordinátákkal megadott egyenlettel meghatározott görbe:

$$r = a\varphi,$$

ahol r a kiinduló ponttól (origótól) mért távolság; φ az elfordulás szöge (az x-tengely pozitív felével bezárt forgásszög); a tetszőleges pozitív állandó, amely a spirál jellegét (sűrűségét) határozza meg.

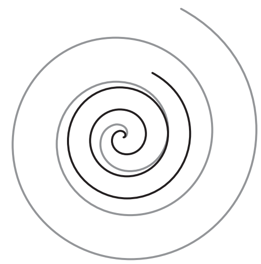


$P_1(r_1;\varphi)$, $P_2(r_2;\varphi+2\pi)$, $P_n\big(r_n;\varphi+(n-1)2\pi\big)$, ..., *ahol* $r_i = a\big[\varphi+(i-1)2\pi\big]$

Az Arkhimédész-féle spirál ágai közti távolság az a értékétől függő állandó. (Minél kisebb az $a \neq 0$ értéke, annál sűrűbbek az ágai.) Ugyanis:

$$r_n - r_{n-1} = a\big[\varphi+(n-1)2\pi\big] - a\big[\varphi+(n-2)2\pi\big] = 2a\pi.$$

Szabadkézzel úgy rajzolhatjuk meg, hogy az első körben minél több értéket kiszámítva, kialakítjuk a kezdő formát, majd az e_φ félegyenesekre a $2a\pi$ közelítő értékének megfelelő távolságot P_1-től kezdve felmérjük. Az így kapott spirálpontokat összekötjük.



2. ábra

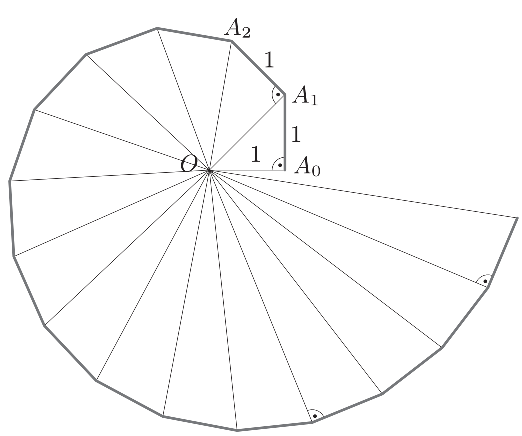
A *2. ábrán* a szürkével rajzolt spirálnál $a = \frac{1}{2}$, a feketénél $a = \frac{1}{4}$. Így az ágak közti távolság az alábbi, a rajzolást segítő táblázat utolsó oszlopában megjelenő érték:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
szürke: $r = \frac{1}{2}\varphi$	0	0,3	0,5	0,8	1	1,3	1,5	1,8	2,1	2,3	2,6	2,8	**3,1**
fekete: $r = \frac{1}{4}\varphi$	0	0,1	0,3	0,4	0,5	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,3	1,4	**1,6**

Ezt a görbét közelítő értékekkel felvett véges sok pont szabadkézi összekötésével rajzoltuk meg, így – természetesen – euklidészi szerkesztésről nem beszélhetünk.

3. Szerkesszünk spirált!

3.a. Spirált pontosan is szerkeszthetünk. Szakaszokból áll a rekurzív-módon megadott ún. *négyzetgyök-spirál*. Induljunk ki egy egyenlő szárú derékszögű háromszögből (*3. ábra*): $OA_0A_1\triangle$, amelyben $OA_0 = A_0A_1 = 1$ egység. Majd illesszük hozzá az OA_1A_2 derékszögű háromszöget, amelyben $A_1A_2 = 1$ egység. Ez az eljárás bármeddig folytatható. Legyen $OA_i = a_i$, ekkor $a_i^2 = a_{i-1}^2 + 1$.



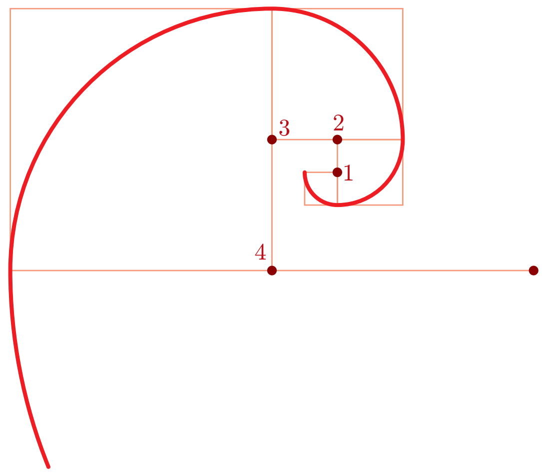
3. ábra

Nevét onnan kapta, hogy igaz rá az a tulajdonság, hogy $a_{n-1} = \sqrt{n}$, azaz bármely természetes szám négyzetgyökének megfelelő hosszúságú szakaszt – elvileg – megszerkeszthetünk ezzel a módszerrel. A bizonyítás teljes indukcióval könnyen elvégezhető: $a_0 = 1$ és $a_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

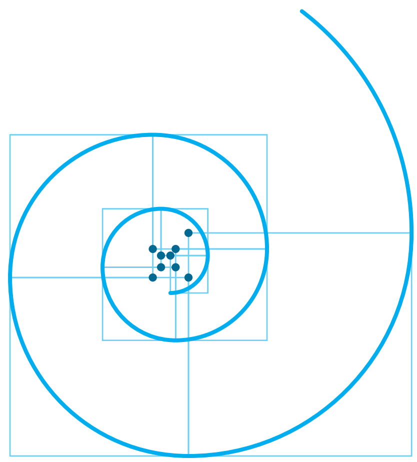
Tegyük fel, hogy $a_{k-2} = \sqrt{k-1}$. Ekkor

$$(a_{k-1})^2 = (a_{k-2})^2 + 1 = k - 1 + 1 = k, \quad \text{tehát} \quad a_{k-1} = \sqrt{k}.$$

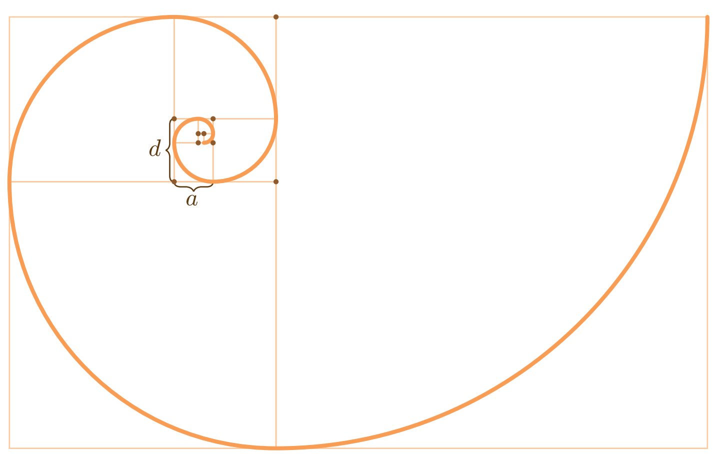
3.b. Szakaszok helyett *körívekből is* létrehozhatunk *pontosan* szerkeszthető spirált. Kiindulásul válasszunk egy négyzetet vagy egy egyenlőszárú (nem derékszögű) háromszöget és egy $q > 1$ valós számot (*4. ábra*).



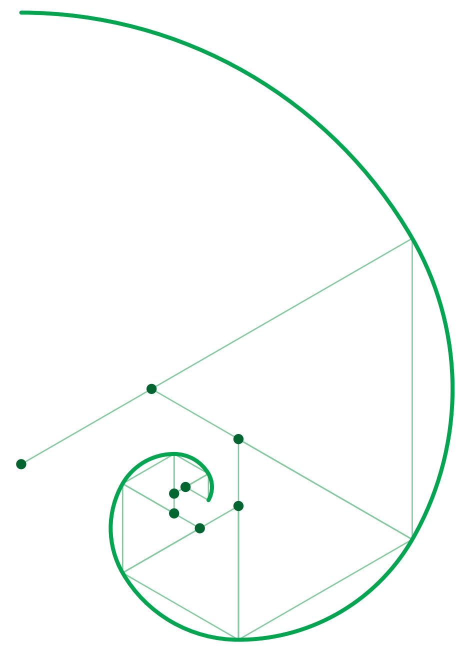
4.a. ábra. $q = 2$



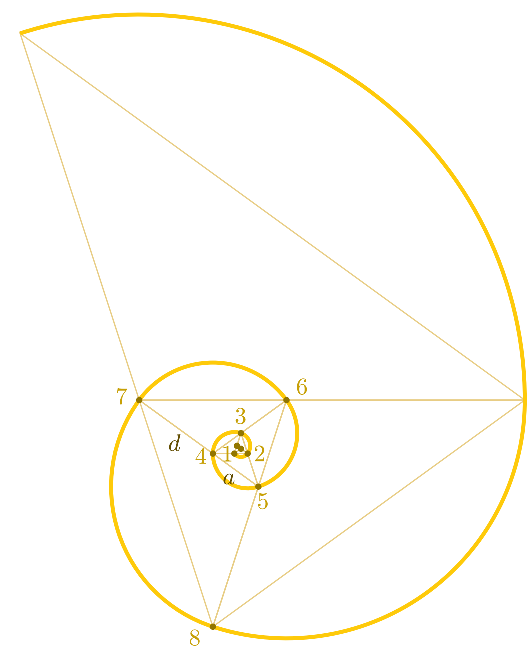
4.b. ábra. $q = \frac{5}{4}$



4.c. ábra. $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



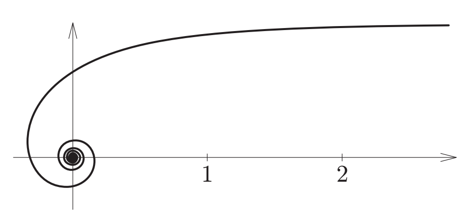
4.d. ábra. A háromszög szárszöge 60° és $q = \dfrac{3}{2}$



4.e. ábra. A háromszög szárszöge 108° és $q = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

A *4. ábra* mindegyik spiráljánál a körívek sugarai q hányadosú mértani sorozatot alkotnak. Kitüntetett szerepű a *4.c.* és az *4.e.* „aranyspirál”, ahol a körsugarak a, d, $a+d$, $a+2d$, $2a+3d$, $\ldots$ szabály szerint követik egymást (ún. Fibonacci-sorozat, amelyben $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$). Ez utóbbi spirálok – a mértani közép tulajdonság miatt – *„gyorsan táguló”* formájúak.

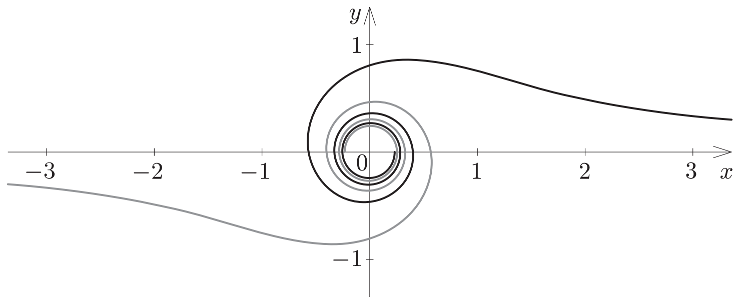
3.c. *”Gyorsan örvénylő”* spirált rajzolhatunk, ha az Arkhimédész-féle $\dfrac{r}{\varphi}$ = állandó szabályt $r\varphi$ = állandóra változtatjuk. Az $r\varphi = a$ polárkoordinátás egyenlettel megadott alakzatot – természetesen – ismét csak közelítő módszerrel vázolhatjuk fel (*5. ábra,* $a = 1$).



5. ábra

Az *5. ábrán* látható spirálnak nem lehet kezdőpontja, hiszen $r \neq 0$, és $\varphi \to \infty$ esetén megfelelő pontjai egyre közelebb kerülnek az origóhoz. Ez indokolja a ***hiperbolikus spirál*** elnevezését.

Hasonló jellegű, de ***kettős spirál*** rajzolható, ha $r = \dfrac{a}{\varphi}$ helyett az $r^2 = \dfrac{a^2}{\varphi}$ egyenletből indulunk ki (*6. ábra,* $a^2 = 1$).



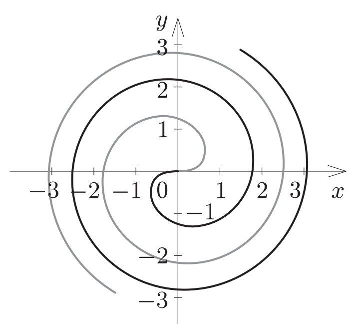
6. ábra

A csavarodó, majd kissé hajlottan elnyúló forma emlékeztet a római madárjósok görbe botjára, a „lituus”-ra. Innen kapta ez a fajta spirál a *lituus* nevet.

4. Fermat és Descartes

4.a. A 17. század elején élt Toulouse-ban egy jogász, aki minden idejét és energiáját a matematikának szentelte: az újabb és újabb kérdések izgalma és a gondolkodás élvezete hajtotta. *Pierre Fermat* jogtanácsos nem mozdult ki városából, nem publikálta tételeit, feljegyzései és levelei maradtak fenn csak. Pascallal valószínűségi problémákról, Descartes-tal pedig az algebra és a geometria egyesítésével kapcsolatos gondolatairól – az analitikus geometriáról – levelezett. Ezekből a levélváltásokból született meg a matematika két új fejezete. Fermat a „legzseniálisabb amatőr”-ként él a matematika történetében. Nevét, többek között, egy általa kidolgozott spirál is őrzi.

A ***Fermat-féle spirál*** az archimédészi-ből képez új kettős spirált az $r^2 = a^2\varphi$ egyenlettel (*7. ábra,* $a = 1$). Ezt a spirált az archimédészi-től eltérően, nem azonos távolságú, hanem ***„lassan sűrűsödő”*** ágak alkotják.



7. ábra

Tekintsük ugyanis a *7. ábrán* látható görbének a

$$P_1(r_1;\varphi),\quad P_2(r_2;\varphi+2\pi),\quad \ldots,$$
$$P_i\big(r_i;\varphi+(i-1)2\pi\big)$$

pontjait, ahol $r_i = a\sqrt{\varphi+(i-1)2\pi}$. Vizsgáljuk az $\dfrac{r_{i+1}}{r_i}$ hányadost:

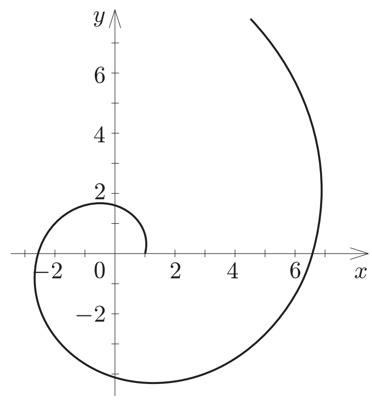
$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \sqrt{\frac{\varphi+i2\pi}{\varphi+(i-1)2\pi}} = \sqrt{1+\frac{2\pi}{\varphi+(i-1)2\pi}}.$$

Mivel i értékét növelve a $\dfrac{2\pi}{\varphi+(i-1)2\pi}$ tört értéke egyre kisebb, azért $\lim \dfrac{r_{i+1}}{r_i} = 1$ $(i \to \infty)$, ami éppen a sűrűsödést jelenti.

4.b. *Descartes* – a levelezőtárs – is megalkotta a maga spirálját. Az ő definíciója azonban *alapvetően különbözik az összes eddigitől,* ahol r, illetve r^2 és φ között egyenes- vagy fordított arányosság-jellegű kapcsolat áll fenn. A *Descartes-féle spirál egyenlete:*

$$r = a \cdot e^{k\varphi} \quad (a > 0;\ k \neq 0),$$
$$\ln r = \ln a + k\varphi,$$
$$\varphi = \frac{1}{k} \ln \frac{r}{a}.$$

E sorok indokolttá teszik a *logaritmikus spirál* elnevezést (*8. ábra*).



8. ábra

A szabadkézi rajzolást segítő táblázat ($a = 1$; $k = 0,3$):

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
$e^{0,3\phi}$	1	1,2	1,4	1,6	1,9	2,2	2,6	3	3,5	4,1	4,8	5,6	6,6	7,7	9

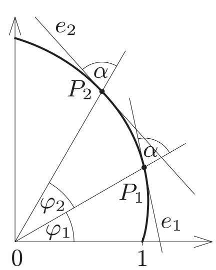
Ha végignézzük az eddigi rajzokat, feltűnik, hogy a *4. ábrán* látható spirálfajta – formáját tekintve – közeli rokonságban állhat a logaritmikus spirállal. Izgalmas lehet fényt deríteni e rokoni szálakra, ezért érdemes számba venni a Descartes-féle spirál jellemző tulajdonságait.

1. A görbe derivált görbéje önmagához hasonló: $r'(\varphi) = ake^{k\varphi} = kr(\varphi)$. (Az sem lehetetlen, hogy ez az összefüggés ihlette Descartes-ot e spirál megalkotására.) **2.** Az azonos szögelfordulásokhoz tartozó $OP_1 = r_1$, $OP_2 = r_2$, $\ldots$ vezérsugarak mértani sorozatot alkotnak. E sorozat hányadosa: $e^{k\Delta\varphi}$. Igazolásként tekintsük az $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ hányadost:

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{ae^{k\varphi_{n+1}}}{ae^{k\varphi_n}} = e^{k\Delta\varphi},$$

ahol $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ számtani sorozatot képez, melynek differenciája $\Delta\varphi$.

3. A görbe bármely pontjába húzott vezérsugár és érintő hajlásszöge állandó. Ha ezt az állandó szöget α-val jelöljük, akkor $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k}$ (*9. ábra*).



9. ábra

A bizonyításhoz térjünk át derékszögű koordinátákra:

$$P(x; y) = P\big(r(\varphi) \cos \varphi; r(\varphi) \sin \varphi\big).$$

Az érintő meredeksége (ha van):

$$m_e = \frac{y'}{x'} = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}.$$

Az 1. tulajdonság miatt

$$m_e = \frac{k\sin\varphi + \cos\varphi}{k\cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Az OP vezérsugár meredeksége (ha van):

$$m_{OP} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

A két egyenes hajlásszögének (α) meghatározásához használjuk az ismert trigonometrikus összefüggést:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{m_{OP} - m_e}{1 + m_{OP}m_e}\right| = \left|\frac{\frac{\sin\varphi(k\cos\varphi - \sin\varphi) - \cos\varphi(k\sin\varphi + \cos\varphi)}{\cos\varphi(k\cos\varphi - \sin\varphi)}}{\frac{\cos\varphi(k\cos\varphi - \sin\varphi) + \sin\varphi(k\sin\varphi + \cos\varphi)}{\cos\varphi(k\cos\varphi - \sin\varphi)}}\right|.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és a lehetséges egyszerűsítéseket:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{k(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}\right| = \frac{1}{k}.$$

Megjegyzések: 1. Nincs értelmezve az érintő meredeksége, ha $\sin\varphi = k\cos\varphi$. Ekkor $\alpha = 90^\circ - \varphi$, azaz $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi$, és valóban

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{k}.$$

2. A vezérsugár meredeksége akkor nincs értelmezve, ha $\cos\varphi = 0$. Ekkor

$$m_e = \frac{k\sin\varphi}{-\sin\varphi} = -k, \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{-\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{k}.$$

3. A *8. ábrán* látható spirál esetén

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10}{3}, \quad \text{tehát} \quad \alpha \approx 73^\circ.$$

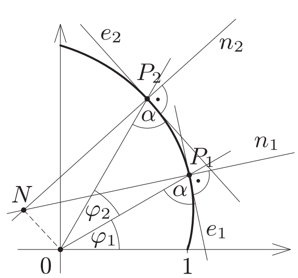
5. Fedezzük fel a rokonságot!

Térjünk vissza arra a kérdésre, hogy:

Vajon milyen rokonság köti össze a 4. ábra *spiráljait a* 8. ábrán *látható logaritmikus spirállal?*

A 3. tulajdonság következményeként belátható a következő állítás: **4.** Az $r = a\cdot e^{k\varphi}$ egyenlettel definiált görbe nem állhat körívdarabokból.

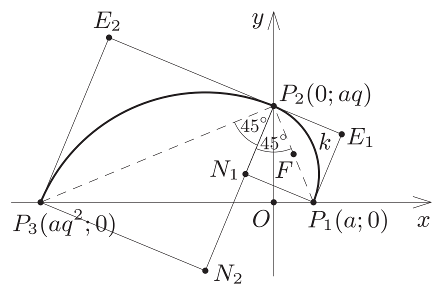
A bizonyításhoz használjuk a *10. ábra* jelöléseit. Ha feltételezzük, hogy P_1 és P_2 azonos köríven van, akkor az e_1, e_2 érintőkre állított n_1, n_2 merőlegesek N metszéspontja lenne a kör középpontja. De a 3. tulajdonság miatt a P_1 és a P_2 az NO szakasz $(90^\circ - \alpha)$ szögű látókörívének két pontja, mivel $NP_1O\sphericalangle = NP_2O\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. E látókör középpontja azonban az NO szakasz felezőmerőlegesén van, tehát nem lehet azonos az N ponttal. Az indirekt feltételezés ellentmondásra vezetett, tehát az állítás igaz.



10. ábra

Megjegyzendő még, hogy $\alpha \neq 90^\circ$, (hiszen akkor $\operatorname{ctg}\alpha = 0$ lenne, vagyis $k = 0$ miatt a spirál elfajulna a sugarú körré), tehát az N és az O pont nem eshet egybe. **5.** Ezek után *felvetődik a közelíthetőség kérdése.* Megközelíthetők-e a spirál-darabok körívekkel? Ha igen, akkor hogyan? Elég jó-e a közelítés? Függ-e k-tól? Ha igen, milyen módon?

A tengelyeken lévő P_1, P_2 és P_3 spirálpontok (*11. ábra*) derékszögű háromszög csúcsai. Indoklás: OP_1; OP_2 és OP_3 mértani sorozatot alkotnak. ($q = e^{\frac{k\pi}{2}} > 1$). Így $aq = \sqrt{a^2q^2}$, ami éppen a magasságtétel, tehát $P_1P_2P_3\triangle$ derékszögű.



11. ábra

Az 5. megállapítás következménye, hogy: **6.** A P_1P_2 és P_2P_3 átlójú négyzetek N_1 és N_2 csúcsa a $P_1P_2P_3\sphericalangle$ szögfelezőjére esik. Ez a tény biztosítja, hogy a *4.a, b, c.* ábra négyzetei k-tól függetlenül ráilleszthetők a spirálra (*11. ábra*).

Összehasonlításunk legizgalmasabb állomásához érkeztünk.

Az N_1 középpontú, N_1P_1 sugarú k körhöz képest hol helyezkednek el a P_1P_2 spirálív pontjai? (A *11. ábrát* nézve „szemléletünk” teljes egybeesést mutat.)

Tekintsük az $N_1P_1E_1P_2$ négyzetet:

$$F\left(\frac{a}{2};\frac{aq}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{FP_2}\left(-\frac{a}{2};\frac{aq}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{FN_1}\left(-\frac{aq}{2};-\frac{a}{2}\right).$$

Ezek szerint a k kör középpontja:

$$N_1\left(\frac{a(1-q)}{2};\frac{a(q-1)}{2}\right),$$

sugara:

$$\frac{a\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{2}}.$$

A kör egyenlete:

$$k\colon\ \left(x-\frac{a(1-q)}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a(q-1)}{2}\right)^2=\frac{a^2(1+q^2)}{2}.$$

Átalakítás után:

$$x^2+y^2+a(q-1)(x-y)=a^2q.$$

Behelyettesítve a spirál-pontokat, amelyekre

$$x=a\cdot e^{k\varphi}\cos\varphi \quad \text{és} \quad y=a\cdot e^{k\varphi}\sin\varphi,$$

azt kapjuk, hogy

$$a^2e^{2k\varphi}+a^2e^{k\varphi}(q-1)(\cos\varphi-\sin\varphi)=a^2q.$$

Elosztva az egyenletet a^2-tel, majd átrendezve:

$$(q-1)(\sin\varphi-\cos\varphi)=\frac{e^{2k\varphi}-q}{e^{k\varphi}} \qquad \left(\text{ahol } q=e^{\frac{k\pi}{2}}\right). \tag{1}$$

Ha belátnánk, hogy (1) bal és jobb oldalán álló kifejezés „majdnem” ugyanazokat az értékeket veszi fel a $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ esetben, akkor az azt jelentené, hogy a két vizsgált spirál „közelítően” megegyezik egymással.

Mivel $\sin\varphi-\cos\varphi=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$, azért célszerű bevezetni az $\alpha=\varphi-\frac{\pi}{4}$ helyettesítést. Ekkor az (1) bal oldalán álló függvény:

$$f(\alpha)=\sqrt{2}\left(e^{\frac{k\pi}{2}}-1\right)\sin\alpha$$

az (1) jobb oldalán álló függvény:

$$g(\alpha)=2\frac{e^{k\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}-e^{k\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}}{2}=2e^{\frac{k\pi}{4}}\sinh(k\alpha) \qquad \left(-\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{4}\right).$$

Sőt, az egyes k-értékekhez tartozó konstans szorzókat csoportosítva, legyen

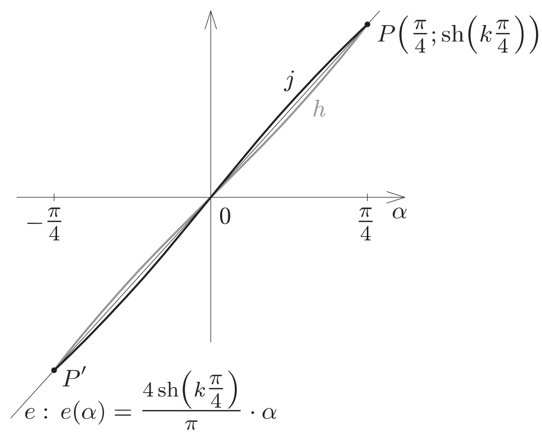
$$h(\alpha)=\sinh(k\alpha) \quad \text{és} \quad j(\alpha)=\sqrt{2}\,\frac{e^{\frac{k\pi}{2}}-1}{2e^{\frac{k\pi}{4}}}\sin\alpha=\sqrt{2}\sinh\left(k\frac{\pi}{4}\right)\sin\alpha.$$

A $h(\alpha)$ és $j(\alpha)$ függvények közös tulajdonságai: mindkettő páratlan függvény és

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = j\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = j\left(-\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{valamint} \quad h(0) = j(0).$$

A két függvény ellentétes konvexitású, hiszen $\sinh'(\alpha) = \cosh(\alpha)$ és $\sin'(\alpha) = \cos(\alpha)$, és e két függvény monotonitása a vizsgált intervallumokban ellentétes. Így a $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$-ban $h(\alpha)$ alulról konkáv, míg $j(\alpha)$ alulról konvex, a $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$-ben pedig éppen fordítva.

Most már felvázolható a két függvény képe.



12. ábra

Végül becsüljük meg j és h eltérését e-től:

$$\frac{j(\alpha)}{e(\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right)\sin\alpha}{\frac{4\alpha}{\pi}\sinh\left(k\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \approx \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1,$$

mivel ismeretes, hogy $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

$$\frac{e(\alpha)}{h(\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right)\alpha}{\frac{\pi}{4}\sinh(k\alpha)} = \frac{\sinh\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{\frac{k\pi}{4}}\,\frac{k\alpha}{\sinh(k\alpha)} \approx 1,$$

mivel $x \to 0$ esetén $\lim \frac{\sinh(x)}{x} = 1$.

Ezzel beláttuk, hogy az $r(\varphi) = a \cdot e^{k\varphi}$ módon definiált logaritmikus spirál közelíthető negyed körívekkel, a és k értékétől függetlenül.

7. Konklúzió

Manapság, a könyvesboltok polcain látványos, vonzó kiadványok keresnek rejtett, még fel nem fedezettnek vélt összefüggéseket titokzatos világunkban.

Lapozzuk fel egyiket-másikat, és a misztikus következtetések alapjait képező információ-sűrítményt fogadjuk értő háttértudással.

Idézet Stephen Skinner: *Szakrális geometria* című könyvének 48. oldaláról: „A logaritmikus vagy szögazonos spirál keletkezésének kulcsszáma a phi (az aranymetszési állandó). A logaritmikus spirál olyan örvénylő négyszögekből áll, amelyek – a középponttól kifelé haladva – a phi által irányított harmonikus rendben növekednek … kezdőpontja van, vége azonban nincs …”

De mi

– tudjuk, hogy a $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ aranymetszési állandó bármely más $q > 1$ valós számmal helyettesíthető;

– tudjuk, hogy nem lehet kezdőpontja, mert az $e^{k\varphi}$ értéke egyetlen φ esetén sem 0.

Hasonló mondatokat találunk a Vince Kiadó által 2009-ben megjelentetett *A titkos kód* című könyvben (127. oldal):

– „… Ebben a spirálban benne foglaltatik a Φ harmóniájának és egyensúlyának gyönyörűséges titka.”

A mellékelt szerkesztési utasítás lényegében megegyezik a cikk 4. ábrájának rajzaival.

De mi

- tudjuk, hogy az így kapott görbe valóban csodás matematikai közelítés, de *nem* maga a logaritmikus spirál;
- tudjuk, hogy miért kapta a „logaritmikus” jelzőt;

és

- tudjuk, hogy *a logaritmikus spirál szépségei, önmagát sokszorozó végtelensége a Φ különleges aránytól függetlenül is elénk tárul.*

Halász Ágnes
Eötvös József Gimnázium (Budapest)