Megoldásvázlatok a 2011/1. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Gerőcs László
Budapest

I. rész

1. *Egy vásáros vattacukrot és főtt kukoricát árult a piacon. Egy vattacukron* 40%*, egy főtt kukoricán pedig* 25% *a haszna. Egy napon kétszer annyi vattacukrot adott el, mint főtt kukoricát, és így* 36%*-os lett a haszna. Másnap viszont kétszer annyi főtt kukoricát adott el, mint vattacukrot. Hány százalék haszna lett ezen a napon?* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen c egy vattacukor, k egy kukorica beszerzési és előállítási költsége. Ha az első napon x db kukoricát adott el az árus, akkor a feltételek szerint:

$$1{,}4\cdot 2cx+1{,}25\cdot kx=(kx+2cx)\cdot 1{,}36.$$

Innen egyszerűsítés és rendezés után kapjuk:

$$c=\frac{11}{8}k.$$

Ha másnap y db vattacukrot adott el, és e napon a beszerzési és előállítási költség z-szerese lett a bevétele, akkor:

$$1{,}4\cdot cy+1{,}25\cdot 2ky=(cy+2ky)\cdot z.$$

Ismét egyszerűsítés és összevonás után, felhasználva az előbb c és k között kapott összefüggést:

$$z=\frac{1{,}4cy+2{,}5ky}{cy+2ky}=\frac{1{,}4\cdot\frac{11}{8}k+2{,}5k}{\frac{11}{8}k+2k}=\frac{1{,}4\cdot 11+2{,}5\cdot 8}{11+2\cdot 8}\approx 1{,}31.$$

Tehát a vásáros haszna másnap kb. 31% lett.

2. *A BKV megfigyelései alapján az utasoknak kb.* 8%*-a bliccel, azaz érvényes jegy vagy bérlet nélkül utazik a járatokon.*

a) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy buszon, amelyen* 24*-en utaznak, a jegyellenőr nem talál bliccelőt?*

b) *Hány utas esetén lesz legalább* 90% *annak az esélye, hogy az ellenőr talál bliccelőt a járaton?*

c) *Egy buszon* 24 *utas tartózkodott. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan két bliccelőt talál az ellenőr?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott utas bliccel 0,08, így annak a valószínűsége, hogy az utasnak van érvényes menetjegye vagy bérlete 0,92%. Ezek szerint annak a valószínűsége, hogy a 24 utas mindegyikének van érvényes menetjegye vagy bérlete

$$0{,}92^{24}\approx 0{,}135.$$

(Ez meglehetősen kicsi valószínűség, így 24 utas közül már elég nagy eséllyel (86,5%) talál bliccelőt az ellenőr.)

b) Ha annak az esélye, hogy talál bliccelőt az ellenőr legalább 90%, akkor annak az esélye, hogy nem talál bliccelőt kisebb, mint 10%, azaz annak a valószínűsége, hogy nem talál bliccelőt kisebb, mint 0,1.

Mivel annak a valószínűsége, hogy n utas között nincs bliccelő $0{,}92^n$, így a $0{,}92^n<0{,}1$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg 0{,}92^n<\lg 0{,}1,\quad\text{azaz}\quad n\cdot\lg 0{,}92<\lg 0{,}1.$$

Most elosztjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\lg 0{,}92$-dal, de vigyázzunk, mert $\lg 0{,}92$ negatív szám, így az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$$n>\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}92}\approx\frac{-1}{-0{,}0362}\approx 27{,}6.$$

Tehát 28 utas esetén már legalább 90%-os annak az esélye, hogy találunk bliccelőt a járaton.

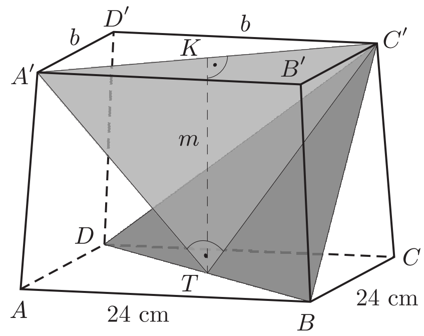
c) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen ellenőrzött utas bliccel 0,08, annak a valószínűsége, hogy nem bliccel, 0,92. A 24 utas közül a két bliccelőt $\binom{24}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Így – a binomiális eloszlás szerint – annak a valószínűsége, hogy a 24 utas között pontosan két bliccelő van:

$$\binom{24}{2}\cdot 0{,}08^2\cdot 0{,}92^{22}\approx 0{,}282.$$

Tehát kb. 28,2% az esélye annak, hogy 24 utas között pontosan két bliccelőt találunk.

3. *Az $ABCDA'B'C'D'$ négyzet alapú egyenes csonkagúla egyik határoló négyzetének oldala* 24 cm (*lásd az* ábrát).

Tudjuk, hogy a $BC'D$ háromszög szabályos, az $A'TC'$ háromszög pedig derékszögű, ahol T a 24 cm *oldalú négyzet átlóinak a metszéspontja. Mekkora a gúla térfogata?* (*14 pont*)



Megoldás. A csonkagúla másik határoló négyzetének oldalát, valamint a testmagasságot kell kiszámítanunk (ábránkon ezeket b-vel, illetve m-mel jelöltük).

A BDC' szabályos háromszög oldalai az $ABCD$ négyzet átlójával egyenlők: $BD = DC' = BC' = 24\sqrt{2}$. E háromszög $C'T$ magassága:

$$C'T = \frac{24\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6}.$$

$C'T$ az $A'TC'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóival is egyenlő. Ezek szerint az $A'TC'$ háromszög $A'C'$ átfogója:

$$A'C' = 12\sqrt{6}\sqrt{2} = 12\sqrt{12} = 24\sqrt{3}.$$

Ebből pedig az $A'B'C'D'$ négyzet b oldala:

$$b = \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{6}.$$

A csonkagúla m magassága az $A'TC'$ egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága, tehát:

$$m = KT = \frac{A'C'}{2} = 12\sqrt{3}.$$

Most már minden megvan ahhoz, hogy meghatározzuk a csonkagúla V térfogatát:

$$V = \frac{12\sqrt{3}}{3} \cdot \left(24^2 + 24 \cdot 12\sqrt{6} + \left(12\sqrt{6}\,\right)^2\right) = 4\sqrt{3} \cdot \left(576 + 288\sqrt{6} + 864\right) \approx 14\,864{,}1.$$

Vagyis a térfogat kb. 14 864,1 cm^3.

Megjegyzés. A feladat szövegében az egyik határoló négyzet oldalhossza volt adott. Érdemes észrevenni, hogy a csonkagúla „fedőnégyzetének” b oldala ennél nagyobb lett.

4. *Pisti külföldi útja során meglátott egy kirakatban egy igen kedvező árú laptopot, melynek ára euróban háromjegyű pozitív egész szám volt. Bement, hogy megvásárolja, de döbbenten tapasztalta, hogy a pénztárnál* 1 *euróval kevesebbet számláztak, mint a kirakatban látott ár kétszerese. Mikor reklamált, kiderült, hogy a kirakatban az árcédulán a számjegyeket véletlenül fordított sorrendben írták ki. Mennyibe került a laptop?* (*14 pont*)

Megoldás. Ha a kirakatban látott ár $\overline{cba}$, azaz a valódi ár $\overline{abc}$. A pénztárnál $2 \cdot \overline{cba} - 1$ eurót kértek Pistitől. A feltételek szerint:

$$\overline{abc} + 1 = 2 \cdot \overline{cba}.$$

Az egyenlet jobb oldala páros, így a bal oldalnak is párosnak, tehát c-nek páratlannak kell lennie. De $c < 5$ kell, hogy legyen, ugyanis ellenkező esetben az egyenlet jobb oldalán már négyjegyű szám szerepelne, de a bal oldal csak háromjegyű (az $\overline{abc} = 999$ eset nyilván kizárható). Ezek szerint $c = 1$ vagy $c = 3$.

Ha $c = 1$, akkor az egyenlet bal oldala 2-re végződik. Ekkor a jobb oldalon $a = 1$ vagy $a = 6$ lehet. De $a = 1$ esetén a bal oldal 200-nál kisebb, míg a jobb oldal 200-nál nagyobb lenne, tehát $a = 1$ nem lehetséges. Ha $a = 6$, akkor a bal oldal 600-nál nagyobb, míg a jobb pedig 400-nál kisebb lenne, így ez is lehetetlen.

Ha $c = 3$, akkor a bal oldali szám 4-re végződik, így a jobb oldalon $a = 2$, vagy $a = 7$. Ha $a = 2$, akkor a bal oldal 300-nál kisebb, míg a jobb oldal 600-nál nagyobb lenne, ami lehetetlen. Végül, ha $a = 7$, akkor az egyenlet így alakul:

$$\overline{7b3} + 1 = 2 \cdot \overline{3b7}, \quad \text{azaz} \quad 704 + 10b = 614 + 20b, \quad \text{ahonnan} \quad b = 9.$$

Tehát Pisti a kirakatban a 397-et látta, a valóságos ár pedig 793 euró.

II. rész

5. *a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényről tudjuk, hogy egyetlen zérushelye az $x = 1$-ben van és $f(2) = 2$. Határozzuk meg az a, b, c együtthatókat.*

b) Legyenek a valós számok halmazán értelmezett függvények $g(x) = x^2 - 3x + 2$ és $h(x) = 2x - a$. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy a $g\big(h(x)\big) = h\big(g(x)\big)$ egyenletnek ne legyen valós megoldása. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A feltételek alapján az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0, \\ a + b + c &= 0, \\ 4a + 2b + c &= 2. \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből: $c = -a - b$. Ezt az első és a harmadik egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} b^2 + 4a^2 + 4ab &= 0, \\ 3a + b &= 2. \end{aligned}\right\}.$$

A második egyenletből: $b = 2 - 3a$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$(2 - 3a)^2 + 4a^2 + 4a(2 - 3a) = 0, \quad \text{ahonnan} \quad a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 = 0,$$

tehát $a = 2$. Ezt visszahelyettesítve: $b = -4$, $c = 2$. A keresett együtthatók: $a = 2$, $b = -4$, $c = 2$.

b) Ha $g(x) = x^2 - 3x + 2$ és $h(x) = 2x - a$, akkor

$$g(h(x)) = (2x - a)^2 - 3(2x - a) + 2 \quad \text{és} \quad h(g(x)) = 2(x^2 - 3x + 2) - a.$$

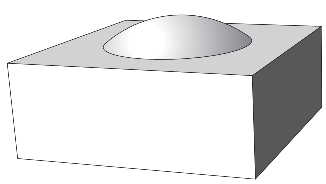
Tehát $4x^2 - 4ax + a^2 - 6x + 3a + 2 = 2x^2 - 6x + 4 - a$, azaz $2x^2 - 4ax + a^2 + 4a - 2 = 0$. Ennek az egyenletnek akkor és csak akkor nincs valós gyöke, ha diszkriminánsa negatív:

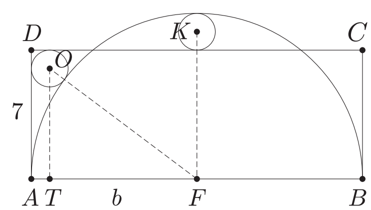
$$16a^2 - 8(a^2 + 4a - 2) < 0, \quad \text{ahonnan} \quad a^2 - 4a + 2 < 0.$$

A másodfokú kifejezés zérushelyei: $a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, így az egyenlőtlenség megoldása: $2 - \sqrt{2} < a < 2 + \sqrt{2}$. Ezek lesznek a feladatban keresett a valós paraméterek.

6. *Egy arab épületet és annak egy tengelymetszetét látjuk az* ábrán.

A tengelymetszet $ABCD$ téglalapjának AD oldala 7 m, *AB oldala pedig nagyobb, mint* 14 m. *Egy kis kör érinti az AD és DC oldalakat, valamint kívülről érinti az AB oldalra emelt félkört. Egy másik kis kör a DC oldalt és a félkört belülről érintő körök legnagyobbika. Mekkora e kis körök sugara, ha tudjuk, hogy e sugarak egyenlők?* (*16 pont*)





Megoldás. Legyen b a téglalap hosszabbik oldala, és legyenek K és O a keresett x sugarú körök középpontjai. Az *ábra* alapján:

$$KF = 7 + x = \frac{b}{2} - x.$$

Az OTF derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$\left(\frac{b}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + (7 - x)^2.$$

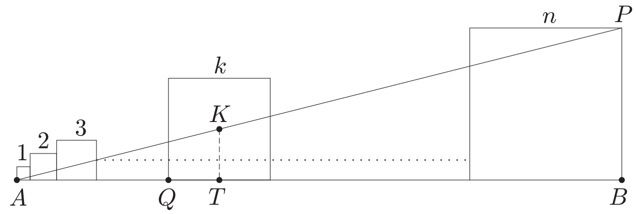
Az előző egyenletet is felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(7 + 3x)^2 = (7 + x)^2 + (7 - x)^2, \quad \text{ahonnan} \quad 7x^2 + 42x - 49 = 0.$$

Az egyenlet egyetlen pozitív gyöke $x = 1$, tehát a kis körök sugara 1 m.

7. *Egymás mellé rajzoltunk n* db *négyzetet. Az egyes négyzetek oldalai sorban $1, 2, 3, \ldots, n$ (lásd az* ábrát*).*

Van-e olyan négyzet, melynek területét az AP szakasz felezi? (*16 pont*)



Megoldás. Ha egy egyenes felezi egy négyzet területét, akkor át kell haladnia a négyzet középpontján. Ha az AP egyenes a k-adik négyzet területét felezi, akkor a KTA és PBA nyilvánvalóan hasonló háromszögekre:

$$\frac{AT}{TK} = \frac{AB}{BP}.$$

Az egyenlőségben szereplő egyes szakaszok:

$$AT = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + \frac{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k^2}{2},$$

$$TK = \frac{k}{2},$$

$$AB = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$BP = n.$$

Ezek szerint:

$$\frac{\frac{k^2}{2}}{\frac{k}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}, \quad \text{azaz} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

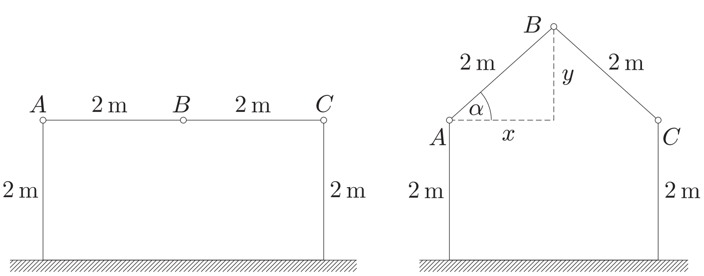
Ez akkor lesz egész szám, ha n páratlan. Tehát csak akkor lesz olyan négyzet, melynek a területét az AP szakasz felezi, ha a négyzetek száma páratlan, és ekkor a $k = \dfrac{n+1}{2}$-edik négyzet területét felezi a kérdéses egyenes.

8. *Egy összecsukható sátor vázát látjuk az ábrán.*

A két 2 m *magas függőleges rúd között az* A, B *és* C *pontokban található csuklók mentén állítható a sátor keresztmetszetének váza oly módon, hogy a két függőleges rudat közelítjük egymáshoz. A rudak* 2 m *hosszúak. A sátor használói tapasztalatból tudják, hogy a két függőleges rudat egymáshoz közelítve, a sátor légtere egy darabig növekszik, aztán újra csökken.*

a) Számítsuk ki $\alpha = 20°$ *esetén a sátor keresztmetszetének területét.*

b) Mekkora α *szög esetén lesz a sátor légtere maximális?* (*16 pont*)



Megoldás. a) A ferde tetőknek a vízszintessel bezárt szöge legyen α.

A keresztmetszet területe ekkor egy téglalap és egy egyenlő szárú háromszög területének összegével egyenlő. A téglalap egyik oldala 2, a másik oldala $2x$, ahol $x = 2\cos\alpha$. Tehát a téglalap területe:

$$T_{\text{téglalap}} = 2 \cdot 2x = 4 \cdot 2\cos\alpha = 8\cos\alpha.$$

Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja és y magassága:

$$AC = 2x = 4\cos\alpha, \quad y = 2\sin\alpha.$$

Így az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{2xy}{2} = xy = 2\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha = 4\cos\alpha \cdot \sin\alpha.$$

Ezek szerint a keresztmetszet területe α függvényében:

$$T(\alpha) = 8\cos\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha, \quad \text{ahol} \quad 0 \le \alpha \le 90^\circ.$$

Vagyis $T(20^\circ) \approx 8{,}803\ \mathrm{m}^2$.

b) A tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a keresztmetszet területének egy bizonyos α-nál maximuma van, vagyis tudjuk, hogy valamely α esetén a $T(\alpha)$ függvény deriváltja 0-val egyenlő. Ezt az α értéket kell meghatároznunk.

$$T'(\alpha) = 8(-\sin\alpha) + 4(\cos\alpha\sin\alpha)' = 8(-\sin\alpha) + 4\big(-\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\big) =$$

$$= -8\sin\alpha + 4\big(-\sin^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha\big) = -8\sin^2\alpha - 8\sin\alpha + 4 = 0,$$

azaz:

$$2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0.$$

A $\sin\alpha$-ra kapott másodfokú egyenlet megoldása:

$$(\sin\alpha)_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

A negatív gyök nyilván nem jöhet számításba, hiszen α hegyesszög, így:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 21{,}47^\circ.$$

Vagyis kb. $21{,}47^\circ$ esetén lesz a sátor légtere a lehető legnagyobb.

9. *Legyenek a és b 1-nél nagyobb valós számok. Egy téglatest élei $\log_a b$, $\log_b a$ és $\log_a ab$. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest felszínének mérőszáma a térfogat mérőszámának több mint 4-szerese.* *(16 pont)*

Megoldás. A téglatest térfogata: $V = \log_a b \cdot \log_b a \cdot \log_a ab$. Mivel $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, így $V = \log_a ab = 1 + \log_a b$. A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot [\log_a b \cdot \log_b a + \log_a b \cdot \log_a ab + \log_b a \cdot \log_a ab].$$

Ez tovább alakítva:

$$A = 2 \cdot \big[1 + \log_a ab(\log_a b + \log_b a)\big] = 2 \cdot \big[1 + V \cdot (\log_a b + \log_b a)\big].$$

Osszuk el a kapott egyenlet mindkét oldalát V-vel:

$$\frac{A}{V} = 2 \cdot \left[\frac{1}{V} + \log_a b + \log_b a\right].$$

A zárójelen belül a második és a harmadik tag egy pozitív számnak és reciprokának összege. Erről ismert, hogy értéke legalább 2. Ehhez a pozitív $\dfrac{1}{V}$-t hozzáadva nyilván:

$$\frac{1}{V} + \log_a b + \log_b a > 2, \quad \text{így} \quad \frac{A}{V} > 4, \quad \text{azaz} \quad A > 4V.$$

Tehát a felszín mérőszáma valóban nagyobb a térfogat mérőszámának négyszeresénél.