Megoldásvázlatok a 2010/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Gyanó Éva
Budapest

I. rész

1. *a) Állítsuk növekvő sorrendbe a következő számokat:*

$$A=\left(2011^{\sin\frac{81\pi}{4}}\right)^{\log_2\log_3\log_5 125};$$

$$B=\left(\sin\frac{81\pi}{4}+\cos\frac{81\pi}{4}\right)^2;$$

$$C=\log_{13-\sqrt{168}}\left(13+\sqrt{168}\right).$$

b) Igazoljuk, hogy az alábbi kifejezés értéke egész szám:

$$\sqrt[3]{2-27\cdot\sqrt[3]{25}+9\cdot\sqrt[3]{25^2}}+\sqrt[3]{25}.$$

(*12 pont*)

Megoldás. *a)*

$$A=\left(2011^{\sin\frac{81\pi}{4}}\right)^{\log_2\log_3\log_5 125}=\left(2011^{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\log_2\log_3\log_5 5^3}=\left(2011^{\frac{\sqrt2}{2}}\right)^{\log_2\log_3 3}=$$

$$=2011^{\frac{\sqrt2}{2}\cdot\log_2 1}=2011^0=1.$$

$$B=\left(\sin\frac{81\pi}{4}+\cos\frac{81\pi}{4}\right)^2=\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=\left(2\cdot\frac{\sqrt2}{2}\right)^2=2.$$

$$C=\log_{13-\sqrt{168}}\left(13+\sqrt{168}\right)=\log_{13-\sqrt{168}}\left(\frac{1}{13-\sqrt{168}}\right)=$$

$$=\log_{13-\sqrt{168}}\left(13-\sqrt{168}\right)^{-1}=-1.$$

Vagyis: $C<A<B$.

b) A köbgyök alatti kifejezés első tagját kettébontva adódik:

$$\sqrt[3]{27-27\cdot\sqrt[3]{25}+9\cdot\sqrt[3]{25^2}-25}+\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{\left(3-\sqrt[3]{25}\right)^3}+\sqrt[3]{25}=3-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{25}=3.$$

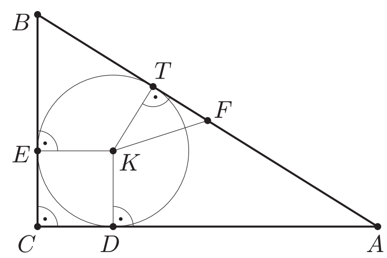
2. *Egy hajó a folyón egyenletes sebességgel a vízfolyás irányában haladva egy bizonyos utat* 5 *óra alatt, ugyanezt az utat a vízfolyással szemben haladva* 5 *óra* 24 *perc alatt teszi meg. Mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad?* (*12 pont*)

Megoldás. Legyen a hajó óránkénti sebessége állóvízben v, a víz sebessége v_1. Ekkor a hajó sebessége a vízfolyás irányában $v+v_1$, a vízfolyással szemben $v-v_1$. Ekkor a megtett út: $5(v+v_1)=5{,}4(v-v_1)$, ebből $v=26\,v_1$. Azaz: $5(26\,v_1+v_1)=135\,v_1$.

A kérdésben szereplő utat a tutaj v_1 sebességgel haladva 135 óra alatt teszi meg.

3. *Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza* 28 *és* 45*. Mennyi a beírható és a köré írható körök középpontjainak távolsága?* (*13 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A két befogó ismeretében a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározzuk az átfogó hosszát: $c^2=28^2+45^2=2809$, azaz $c=53$. Mivel a derékszögű háromszög köré írható körének középpontja az átfogó F felezőpontja, így a kör sugara: $R=26{,}5$. A beírható kör sugara a külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségével meghatározható.



Tudjuk, hogy: $BT = BE = a - r$, $AT = AD = b - r$. Ezek alapján: $c = AB = BT + AT = a - r + b - r$, azaz:

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{28+45-53}{2} = 10.$$

Mivel $KT = r$ és $BT = BE = a - r = 28 - 10 = 18$, így $TF = BF - BT = 26{,}5 - 18 = 8{,}5$. Alkalmazva a Pitagorasz-tételt a KTF derékszögű háromszögre: $KF^2 = 10^2 + 8{,}5^2 = 172{,}25$, azaz $KF \approx 13{,}12$.

A keresett távolság kb. 13,12.

4. *Az $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$; $a \neq b$; $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$) függvényről tudjuk, hogy az $(a+b)$ helyen felvett helyettesítési értéke $(a-4b)$, az $(a-b)$ helyen pedig $(a-7b)$.*

Adjuk meg az $f(x)$ hozzárendelési szabályát. (*14 pont*)

Megoldás. $f(a+b) = a - 4b$, azaz

$$a - 4b = (a+b)^2 + a(a+b) + b,$$
$$a - 4b = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + ab + b.$$

$f(a-b) = a - 7b$, azaz $a - 7b = (a-b)^2 + a(a-b) + b$.

$$a - 7b = a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - ab + b.$$

A (2)-ből elvesszük (3)-at: $3b = 6ab$. Mivel $b \neq 0$, azért $a = \dfrac{1}{2}$.

Ezt visszahelyettesítve az (1)-be, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} - 4b = \left(\frac{1}{2} + b\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + b\right) + b,$$

amiből a $0 = b\left(b + \dfrac{13}{2}\right)$ egyenlet adódik. Mivel $b \neq 0$, azért $b = -\dfrac{13}{2}$.

A keresett függvény hozzárendelési szabálya:

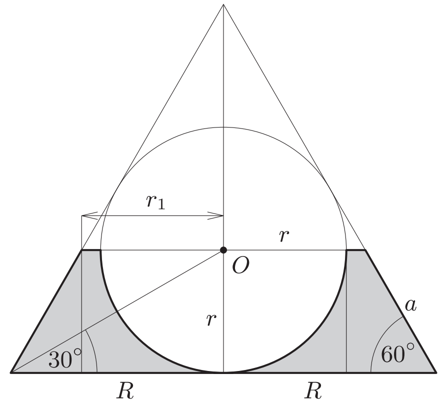
$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{13}{2}.$$

II. rész

5. *Egy r sugarú gömb köré egyenlő oldalú kúpot írunk, a gömb középpontján át a kúp alapjával párhuzamos síkot fektetünk. (Az egyenlő oldalú kúp átmérőjének hossza egyenlő az alkotó hosszával.) Vegyük ki a keletkezett csonkakúpból a benne elhelyezkedő félgömböt.*

Számítsuk ki az így visszamaradó test felszínét és térfogatát. (*16 pont*)

Megoldás. A kérdéses test felszíne az *ábrán* látható részekből áll.



Az alapkör területe:

$$t_1 = R^2\pi.$$

A csonkakúp palást felszíne:

$$t_2 = (R + r_1)a\pi.$$

A körgyűrű területe:

$$t_3 = \left(r_1^2 - r^2\right)\pi.$$

A félgömb felszíne:

$$t_4 = 2r^2\pi.$$

A területeket az ismert r sugárral kell megadni, ezért R, a és r_1 értékét kifejezzük r segítségével:

$$R = r \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3}\,,$$

$$a = \frac{r}{\sin 60^\circ} = r\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}\,,$$

$$r_1 = R - a\cos 60^\circ = r\sqrt{3} - \frac{2r\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = r\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2r\sqrt{3}}{3}\,.$$

Ezek alapján: $t_1 = 3r^2\pi$; $t_2 = \dfrac{10r^2\pi}{3}$; $t_3 = \dfrac{r^2\pi}{3}$; $t_4 = 2r^2\pi$. Így a felszín:

$$A = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{26r^2\pi}{3}\,.$$

A térfogat a csonkakúp térfogatának és a belőle kivett félgömb térfogatának különbségével egyenlő:

$$V = \frac{r\pi}{3}\left(R^2 + Rr_1 + r_1^2\right) - \frac{2r^3\pi}{3}\,.$$

Az R és r_1 értékét r-rel kifejezve: $V = \dfrac{13r^3\pi}{9}$.

6. *Milyen α értékek mellett lesz az alábbi három kifejezés (ebben a sorrendben) egy számtani sorozat egymást követő eleme:* $\lg \sin 2\alpha$*;* $\lg \sin 4\alpha$*;* $\lg \cos 2\alpha$*?* *(16 pont)*

Megoldás. A logaritmusok miatt teljesülni kell a következő kikötéseknek:

$$\begin{array}{llll}
\sin 2\alpha > 0, & \text{ekkor: } 2k_1\pi < 2\alpha < \pi + 2k_1\pi, & \text{vagyis:} & k_1\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi,\ k_1 \in \mathbb{Z};\\
\sin 4\alpha > 0, & \text{ekkor: } 2k_2\pi < 4\alpha < \pi + 2k_2\pi, & \text{vagyis:} & k_2 \cdot \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{4} + k_2 \cdot \dfrac{\pi}{2},\\
 & & & k_2 \in \mathbb{Z};\\
\cos 2\alpha > 0, & \text{ekkor: } -\dfrac{\pi}{2} + 2k_3\pi < 2\alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2k_3\pi, & \text{vagyis:} & -\dfrac{\pi}{4} + k_3\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{4} + k_3\pi,\\
 & & & k_3 \in \mathbb{Z}.
\end{array}$$

A három eset együtt: $k\pi < \alpha < \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

A számtani sorozat miatt: $\lg \sin 4\alpha - \lg \sin 2\alpha = \lg \cos 2\alpha - \lg \sin 4\alpha$. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\lg \frac{\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \lg \frac{\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha}, \quad \text{vagyis:} \quad \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}\,.$$

Elvégezve az egyszerűsítéseket és a megfelelő műveleteket:

$$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{2}\,, \quad \text{azaz} \quad \sin 4\alpha = \frac{1}{2}\,.$$

I. $\quad 4\alpha = \dfrac{\pi}{6} + 2k_4\pi$, ahonnan $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{24} + k_4 \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $k_4 \in \mathbb{Z}$;

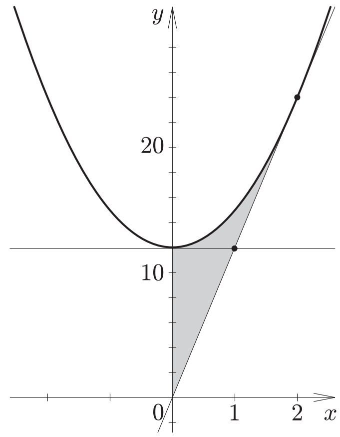
II. $\quad 4\alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2k_5\pi$, ahonnan $\alpha_2 = \dfrac{5\pi}{24} + k_5 \cdot \dfrac{\pi}{2}$, $k_5 \in \mathbb{Z}$.

A megoldás (figyelembe véve a kikötéseket is):

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{24} + k' \cdot \pi, \quad k' \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha_2 = \frac{5\pi}{24} + k'' \cdot \pi, \quad k'' \in \mathbb{Z}.$$

7. *Az $f(x)=3x^2+b$ függvény grafikonjának az $x=2$ helyhez tartozó érintője áthalad az origón.*
a) Hol metszi ez az érintő a parabola vezéregyenesét?
b) Számítsuk ki a függvénygörbe, az érintő, és az y tengely által közbezárt terület nagyságát. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Az érintő áthalad a $P\big(2; f(2)\big)$ ponton. Mivel $f(2)=3\cdot 4+b$, így $P(2; b+12)$. Tudjuk, hogy $f'(x)=6x$, ezért az érintő meredeksége: $f'(2)=12$. Ezek alapján az érintő egyenlete: $12(x-2)=y-b-12$, ami $y=12x+b-12$ alakban is írható.



A feltétel szerint ez átmegy az origón, így $b-12=0$, vagyis $b=12$. Így $f(x)=3x^2+12$, a kérdéses érintő egyenlete pedig: $y=12x$.

A parabola paramétere: $p=\dfrac{1}{6}$, a parabola vezéregyenesének egyenlete:

$$y=12-\frac{1}{12}=\frac{143}{12}.$$

Vagyis az érintő a parabola vezéregyenesét a $\left(\dfrac{143}{144}; \dfrac{143}{12}\right)$ pontban metszi.

b)
$$T=\int_0^2 (3x^2+12)\,dx-\int_0^2 12x\,dx=\int_0^2 (3x^2-12x+12)\,dx=$$

$$=\left[3\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}+12x\right]_0^2=(8-24+24)-0=8.$$

8. *A tojásokat* 15 db*-os dobozokban árulják. Minden tojás $\dfrac{1}{15}$ valószínűséggel sérült.*
a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz?
b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz?
c) A boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük ketten visznek haza csupa ép tojást tartalmazó dobozt? (*16 pont*)

Megoldás. *a)* $P(0 \text{ db törött})=\left(\dfrac{14}{15}\right)^{15}\approx 0{,}355$. Vagyis kb. 35,5% a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz.

b) Már tudjuk, hogy $P(0 \text{ db törött})\approx 0{,}355$. Kiszámítjuk annak a valószínűségét is, hogy egy doboz pontosan 1 db törött tojást tartalmaz:

$$P(1 \text{ db törött})=15\cdot\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{14}\approx 0{,}381.$$

Ezek alapján: $P(\text{kettő vagy több törött})=1-0{,}355-0{,}381=0{,}264$, azaz 26,4%. Vagyis kb. 26,4% a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz.

c) Ha nincs a dobozban törött tojás, annak a valószínűsége: 0,355, ha van benne törött, annak a valószínűsége: 0,645. Tehát:

$$P=\binom{10}{2}\cdot 0{,}355^2\cdot 0{,}645^8\approx 0{,}170,$$

azaz kb. 17%. Vagyis kb. 17% a valószínűsége annak, hogy tíz vásárló között kettő olyan lesz, akik csupa ép tojást tartalmazó dobozt vásároltak.

9. *Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\left|\frac{x^2+y^2}{x+y}\right| = 1.$$

(16 pont)

Megoldás. A tört nevezője miatt: $x+y \neq 0$. Az abszolút értéket felbontva két esetet kell vizsgálnunk:
I. eset: $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = 1$.

Az egyenletet rendezve az $x^2 - x + (y^2 - y) = 0$, x-re másodfokú egyenlet adódik. Akkor van valós gyök, ha $D = 1 + 4y - 4y^2 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel y egész szám, így $y = 0$ vagy $y = 1$ lehet.

Ha $y = 0$, akkor $x = 1$ vagy $x = 0$ lehet.

Ha $y = 1$, akkor $x = 1$ vagy $x = 0$ lehet.

II. eset: $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} = -1$.

Az egyenletet rendezve az $x^2 + x + (y^2 + y) = 0$, x-re másodfokú egyenletet kapjuk. Akkor van valós gyöke, ha $D = 1 - 4y - 4y^2 \geq 0$. Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{-1-\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}.$$

Mivel y egész szám, így $y = -1$, vagy $y = 0$ lehet.

Ha $y = -1$, akkor $x = 0$ vagy $x = -1$.

Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = -1$.

A kikötés figyelembevételével a következő megoldásokat kaptuk:

$$(1;0), \quad (0;1), \quad (1;1), \quad (0,-1), \quad (-1,-1), \quad (-1;0).$$