Emelt szintű gyakorló feladatsor

Gerőcs László
Budapest

I. rész

1. Egy vásáros vattacukrot és főtt kukoricát árult a piacon. Egy vattacukron 40%, egy főtt kukoricán pedig 25% a haszna. Egy napon kétszer annyi vattacukrot adott el, mint főtt kukoricát, és így 36%-os lett a haszna. Másnap viszont kétszer annyi főtt kukoricát adott el, mint vattacukrot. Hány százalék haszna lett ezen a napon? (*11 pont*)

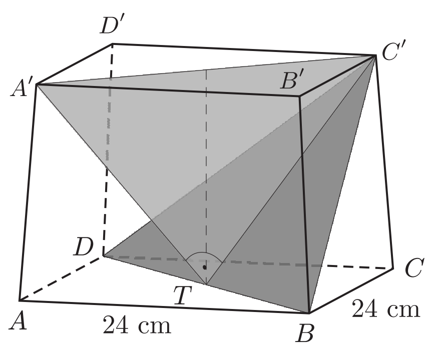
2. A BKV megfigyelései alapján az utasoknak kb. 8%-a bliccel, azaz érvényes jegy vagy bérlet nélkül utazik a járatokon.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy buszon, amelyen 24-en utaznak, a jegyellenőr nem talál bliccelőt?

b) Hány utas esetén lesz legalább 90% annak az esélye, hogy az ellenőr talál bliccelőt a járaton?

c) Egy buszon 24 utas tartózkodott. Mekkora annak a valószínűsége, hogy pontosan két bliccelőt talál az ellenőr? (*12 pont*)

3. Az $ABCDA'B'C'D'$ négyzet alapú egyenes csonkagúla egyik határoló négyzetének oldala 24 cm (lásd az *ábrát*).



Tudjuk, hogy a $BC'D$ háromszög szabályos, az $A'TC'$ háromszög pedig derékszögű, ahol T a 24 cm oldalú négyzet átlóinak a metszéspontja. Mekkora a gúla térfogata? (*14 pont*)

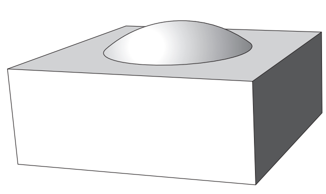
4. Pisti külföldi útja során meglátott egy kirakatban egy igen kedvező árú laptopot, melynek ára euróban háromjegyű pozitív egész szám volt. Bement, hogy megvásárolja, de döbbenten tapasztalta, hogy a pénztárnál 1 euróval kevesebbet számláztak, mint a kirakatban látott ár kétszerese. Mikor reklamált, kiderült, hogy a kirakatban az árcédulán a számjegyeket véletlenül fordított sorrendben írták ki. Mennyibe került a laptop? (*14 pont*)

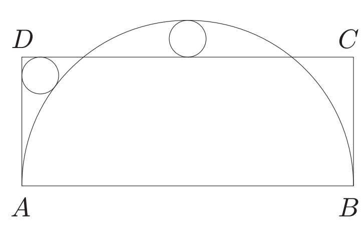
II. rész

5. *a*) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényről tudjuk, hogy egyetlen zérushelye az $x = 1$-ben van és $f(2) = 2$. Határozzuk meg az a, b, c együtthatókat.

b) Legyenek a valós számok halmazán értelmezett függvények $g(x) = x^2 - 3x + 2$ és $h(x) = 2x - a$. Határozzuk meg az a valós paraméter értékét úgy, hogy a $g\big(h(x)\big) = h\big(g(x)\big)$ egyenletnek ne legyen valós megoldása. (*16 pont*)

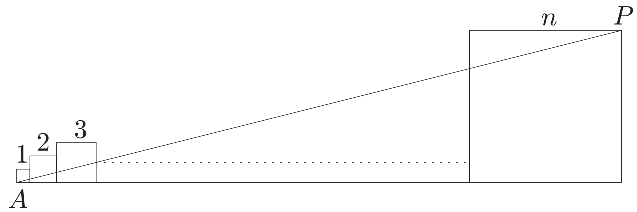
6. Egy arab épületet és annak egy tengelymetszetét látjuk az *ábrán.*





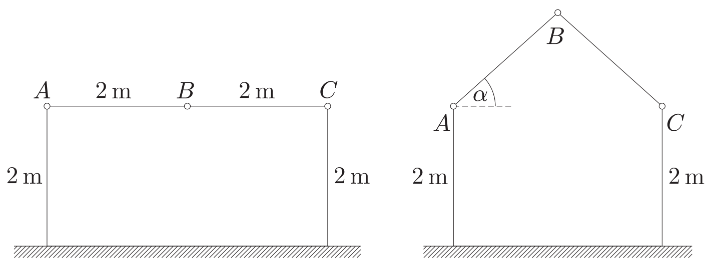
A tengelymetszet $ABCD$ téglalapjának AD oldala 7 m, AB oldala pedig nagyobb, mint 14 m. Egy kis kör érinti az AD és DC oldalakat, valamint kívülről érinti az AB oldalra emelt félkört. Egy másik kis kör a DC oldalt és a félkört belülről érintő körök legnagyobbika. Mekkora e kis körök sugara, ha tudjuk, hogy e sugarak egyenlők? (*16 pont*)

7. Egymás mellé rajzoltunk n db négyzetet. Az egyes négyzetek oldalai sorban $1, 2, 3, \dots, n$ (lásd az *ábrát*).



Van-e olyan négyzet, melynek területét az AP szakasz felezi? (*16 pont*)

8. Egy összecsukható sátor vázát látjuk az *ábrán.*



A két 2 m magas függőleges rúd között az A, B és C pontokban található csuklók mentén állítható a sátor keresztmetszetének váza oly módon, hogy a két függőleges rudat közelítjük egymáshoz. A rudak 2 m hosszúak. A sátor használói tapasztalatból tudják, hogy a két függőleges rudat egymáshoz közelítve, a sátor légtere egy darabig növekszik, aztán újra csökken.

a) Számítsuk ki $\alpha = 20°$ esetén a sátor keresztmetszetének területét.

b) Mekkora α szög esetén lesz a sátor légtere maximális? (*16 pont*)

9. Legyenek a és b 1-nél nagyobb valós számok. Egy téglatest élei $\log_a b$, $\log_b a$ és $\log_a ab$. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest felszínének mérőszáma a térfogat mérőszámának több mint 4-szerese. (*16 pont*)