A 42. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia elméleti feladatai[1]

1. feladat. Egy háromtest-probléma és a LISA

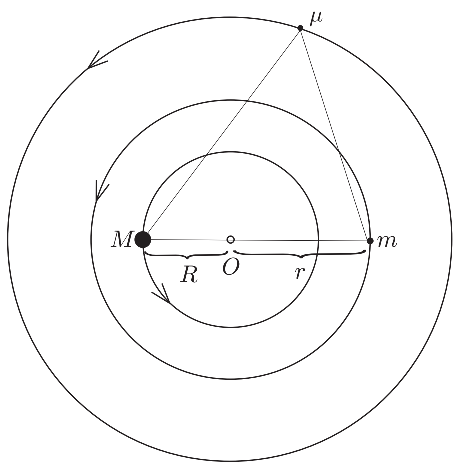
1.1. M és m két egymást vonzó tömegpont, melyek R, illetve r sugarú körpályán mozognak a közös tömegközéppontjuk körül. Fejezd ki az M és m tömegpontokat összekötő szakasz ω_0 szögsebességét R, r, M, m és a G gravitációs állandó segítségével!

1.2. Egy harmadik, infinitezimálisan kicsi μ tömegű testet úgy helyezünk el, hogy azonos síkban, körpályán mozogjon a közös tömegközéppont körül, és maradjon nyugalomban az M és m tömegű testekhez képest, ahogy az *1. ábrán* látható. Tegyük fel, hogy ez a test nem esik egy egyenesbe az M és m testekkel. Fejezd ki a következő mennyiségeket R és r függvényében:

1.2.1. μ és M távolságát,

1.2.2. μ és m távolságát,

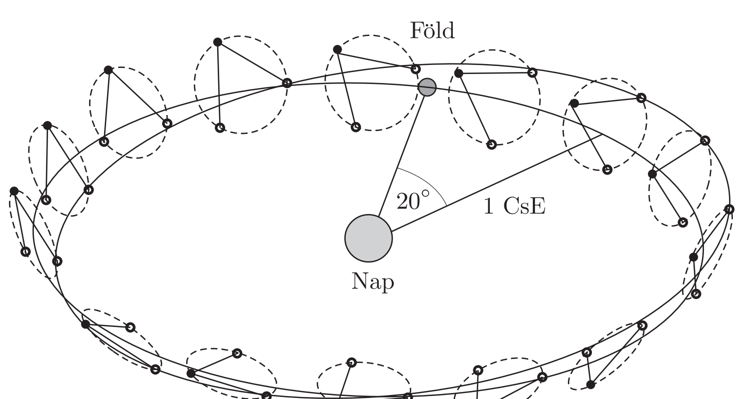
1.2.3. μ és a tömegközéppont távolságát.



1. ábra. Három test pályája egy síkban

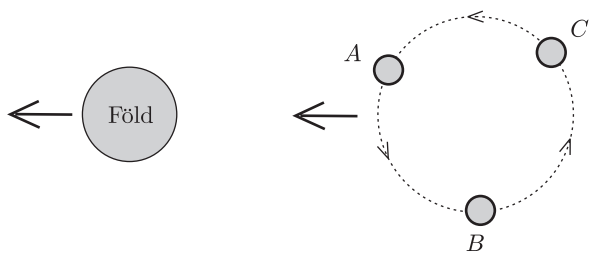
1.3. Tekintsd az $M = m$ esetet. A μ testet kicsit kitérítjük radiális irányban (az $O - \mu$ egyenes mentén). Mekkora μ egyensúlyi helyzet körüli rezgésének körfrekvenciája ω_0-lal kifejezve? Tedd fel, hogy μ perdülete megmarad.

A Laser Interferometry Space Antenna (LISA) három egyforma űrhajó együttese a kisfrekvenciás gravitációs hullámok detektálására. A három űrhajó egy szabályos háromszög csúcsaiban helyezkedik el, ahogy a *2.* és *3. ábrán* látható. Az oldalak (más néven „karok") kb. 5,0 millió km hosszúak. A LISA-együttes egy, a Földéhez hasonló pályán $20°$-kal lemaradva követi a Nap körül a Földet. Mindegyik űrhajó egy saját, kicsit döntött pályán kering a Nap körül. Ennek eredményeként a három űrhajó keringeni látszik a közös középpontjuk körül, évente egy fordulatot megtéve.



[1] A hivatalos megoldást és a mérési feladatokat a KöMaL novemberi számában ismertetjük. A feladatok kidolgozására 5 óra állt rendelkezésre.

2. ábra. A LISA pálya vázlata. A három űrhajó közös középpontjuk körül kering 1 éves periódusidővel. Kezdetben 20°-kal lemaradva követik a Földet[2]



3. ábra. A Földet követő három űrhajó nagyított képe. A, B és C a három űrhajó a szabályos háromszög csúcsaiban

Az űrhajók folyamatosan lézerjeleket bocsátanak ki és fogadnak egymás közt. A gravitációs hullámokat úgy mutatják ki, hogy a karok hosszának kicsiny változásait detektálják interferometriás módszerekkel. Gravitációs hullámok pl. úgy keletkezhetnek, hogy nagytömegű testek (pl. fekete lyukak) ütköznek a szomszédos galaxisokban.

1.4. A három űrhajó síkjában mekkora egy űrhajó relatív sebessége egy másik űrhajóhoz képest?

2. feladat. Elektromosan töltött szappanbuborék

Egy gömb alakú szappanbuborék belsejében a levegő sűrűsége ϱ_i, a hőmérséklet T_i, a buborék sugara R_0, amit ϱ_a sűrűségű, P_a atmoszférikus nyomású és T_a hőmérsékletű külső levegő vesz körül. A szappanhártya felületi feszültsége γ, sűrűsége ϱ_s, vastagsága pedig t. A szappanhártya tömege és felületi feszültsége nem változik a hőmérséklet változásával. Feltehetjük, hogy $R_0 \gg t$.

Jól ismert, hogy a dE energia, ami a szappanhártya-levegő egy oldali határfelületét dA területtel megnöveli, így adható meg: $dE = \gamma dA$, ahol γ a hártya felületi feszültsége.

2.1. Fejezd ki a $\dfrac{\varrho_i T_i}{\varrho_a T_a}$ arányt a következő változókkal: γ, P_a és R_0.

2.2. Add meg a $\dfrac{\varrho_i T_i}{\varrho_a T_a} - 1$ kifejezés számszerű értékét a következő adatok felhasználásával: $\gamma = 0{,}0250\ \mathrm{Nm}^{-1}$, $R_0 = 1{,}00$ cm, illetve $P_a = 1{,}013 \cdot 10^5\ \mathrm{Nm}^{-2}$.

2.3. Kezdetben a buborék belsejében a levegő melegebb, mint kívül. Add meg számszerűen azt a minimális T_i belső hőmérsékletet, ami elegendő ahhoz, hogy a buborék lebegjen a nyugvó levegőben! Az előzőekben megadottakkal együtt használd fel a következő adatokat: $T_a = 300$ K, $\varrho_s = 1000\ \mathrm{kgm}^{-3}$, $\varrho_a = 1{,}30\ \mathrm{kgm}^{-3}$, $t = 100$ nm és $g = 9{,}80\ \mathrm{ms}^{-2}$.

A keletkezése után hamarosan a buborék hőmérsékleti egyensúlyba kerül a környezetével. Természetesen ekkor a buborék a talaj felé esik, ha a levegő nem mozog.

2.4. Add meg paraméteresen a felfelé áramló levegő minimális u sebességét, ami ahhoz kell, hogy megakadályozza a termikus egyensúlyban lévő buborék leesését! Válaszodat add meg ϱ_s, R_0, g, t és a levegő η viszkozitása segítségével! Feltételezheted, hogy az áramlási sebesség olyan kicsiny, hogy a Stokes-törvény alkalmazható, továbbá elhanyagolhatod a buborék sugarának változását, miközben a hőmérséklet a buborék belsejében az egyensúlyi értékre csökken. A Stokes-törvény így adja meg a közegellenállási fékező erőt: $F = 6\pi\eta R_0 u$.

2.5. Számítsd ki az u áramlási sebesség számszerű értékét, ha

$$\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^{-1} s^{-1}}.$$

Az eddigi számítások azt sugallják, hogy a γ felületi feszültség figyelembe vétele csak nagyon kis mértékben befolyásolja az eredmények pontosságát. A további alkérdések esetében hanyagold el a felületi feszültségből adódó tagokat.

2.6. Most a gömb alakú buborék legyen egyenletesen feltöltve q töltéssel. Vezess le egy olyan egyenletet, ami tartalmazza a buborék R_1 új sugarát, továbbá a következő mennyiségeket: R_0, P_a, q és a vákuum ε_0 permittivitását (más néven a vákuum dielektromos állandóját)!

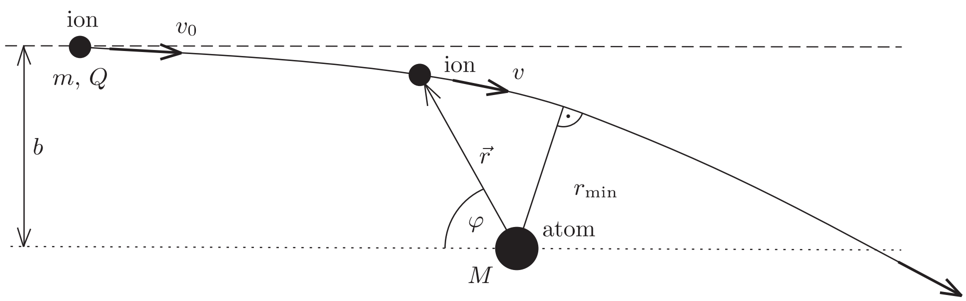
2.7. Tegyük fel, hogy a buborék teljes töltése nem túlságosan nagy (azaz $\dfrac{q^2}{\varepsilon_0 R_0^4} \ll P_a$), és ezért a buborék sugarának növekedése kicsiny. Add meg közelítőleg a buborék sugarának ΔR megváltozását, ahol $R_1 = R_0 + \Delta R$! Használd a következő közelítést: $(1+x)^n \approx 1 + nx$, ha $x \ll 1$.

2.8. Fejezd ki a buborék álló levegőben való lebegéséhez szükséges q töltést a következő mennyiségek függvényében: t, ϱ_a, ϱ_s, ε_0, R_0, P_a! Számítsd ki a q töltés számszerű értékét is! A vákuum permittivitása: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ farad/m.

[2] *Forrás:* D. A. Shaddock, „An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna”, *Publications of the Astronomical Society of Australia,* 2009, **26**, pp. 128–132.

3. feladat. Ion szóródása semleges atomon
(100 éves a Rutherford-atommodell)

Egy m tömegű, Q töltésű iont indítunk nagyon távolról, nemrelativisztikus v_0 kezdeti sebességgel egy $M \gg m$ tömegű, semleges atom felé, melynek elektromos polarizálhatósága α. Az ütközési paraméter nagysága b (lásd a *4. ábrát*).



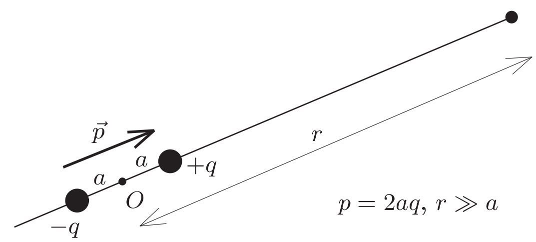
4. ábra

A közeledő ion $\vec{E}$ elektrosztatikus tere folyamatosan polarizálja az atomot, melynek következtében az atom

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

elektromos dipólmomentumra tesz szert. A feladat megoldása során minden sugárzási veszteséget hagyj figyelmen kívül!

3.1. Számítsd ki az $\vec{E}_p$ elektromos térerősséget egy, az O origóban elhelyezkedő $\vec{p}$ dipólmomentumú ideális elektromos dipólustól r távolságra a dipólus tengelye mentén (lásd az *5. ábrát*)!



5. ábra

3.2. Vezesd le a polarizált atom által az ionra ható $\vec{f}$ erő kifejezését! Mutasd meg, hogy ez az erő – az ion töltésének előjelétől függetlenül – *vonzó* jellegű.

3.3. Határozd meg az ion és az atom kölcsönhatásából származó elektromos potenciális energiát α, Q és r függvényében!

3.4. Határozd meg az ion és az atom közötti legkisebb, a *4. ábrán* $r_{\min}$-nel jelölt távolságot!

3.5. Ha a b ütközési paraméter kisebb egy kritikus b_0 értéknél, az ion spirális pályán az atomba zuhan. Ebben az esetben az ion semlegesítődik, az atom töltése pedig megnő. Ez a folyamat „töltés-kicserélődési" kölcsönhatás néven ismert. Mekkora az ion–atom ütközés $A = b_0^2\pi$ módon számolható hatáskeresztmetszete egy ilyen töltés-kicserélődéses folyamat esetén?