

I. rész

1. A Bergengóc ötvösök kétféle fémből készítik ékszereiket.

A holdfém sűrűsége 5000 kg/m^3 , beszerzési ára 1000 ft/g (a „ft” a Bergengóc fizetőeszköz, a fémtallér rövidítése).

A napfém sűrűsége 6000 kg/m^3 , beszerzési ára 2000 ft/g .

A fémekből kétféle ötvözetet készítenek. Az első ötvözet 1 cm^3 -éhez $0,6 \text{ cm}^3$ holdfémeket és $0,4 \text{ cm}^3$ napfémeket használnak fel, míg a második ötvözet 1 cm^3 -éhez $0,4 \text{ cm}^3$ holdfémeket és $0,6 \text{ cm}^3$ napfémeket használnak fel (az ötvözes során nem kell anyagveszteséggel számolni).

a) Mennyi a kétféle ötvözet grammonkénti anyagköltsége?

Az elkészült ékszerek árát úgy kalkulálják, hogy az ékszer grammában adott tömegét megszorozzák az adott ötvözet grammonkénti anyagköltségével, és erre tesznek még rá 20% -ot.

b) Mennyi annak az ötvösnek a haszna, aki a $6,3$ grammos első ötvözetből álló nyakláncot tévedésből úgy adja el, mintha a második ötvözetből készült volna? (11 pont)

2. Hány olyan (egybevágóságtól eltekintve) különböző téglalap van, melynek oldalai (cm-ben) egész számok, míg területe és kerülete (cm^2 -ben és cm-ben) 100 -nál nem nagyobb négyzetszám? (12 pont)

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

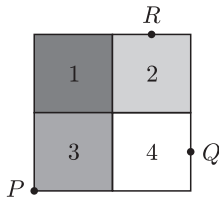
a) $\log_4(x+1) + \log_4(x+2) = \log_2 \sqrt{6}$,

b) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 7x + 12} = 1$.

(14 pont)

4. Peti tíz egyforma 2 egység élű építőkockából tornyot épít. A torony alapja $4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ -es négyzet, de az egyes részeinek más-más a magassága.

(A felülnézeti *ábra* azt mutatja, hogy egy-egy rész hány darab $2 \times 2 \times 2$ cm-es kockából áll.)



Az ábrán látható P , Q , R pontok az egyes részek legmagasabbban lévő építőkockáinak a felső lapján vannak. P az egyik négyzetlap csúcsa, míg Q és R a felső négyzetlapok megfelelő éleinek felezőpontjai.

a) Mekkora a (térbeli) PQR háromszög P -nél lévő szöge?

b) Peti 4 piros, 3 fehér, 2 zöld és 1 kék kockából építi meg a fenti tornyot.

Hányféle különböző felülnézeti ábra áll így elő? (A nem identikus egybevágósági transzformációval egymásba vihető ábrákat különbözőnek tekintjük.) (14 pont)

II. rész

5. a) Igazoljuk, hogy a következő két sorozat konvergens, és közös a határértékük:

$$a_n = \frac{6n^2 - n - 1}{2n^2 + n + 1}, \quad b_n = \sqrt{n^2 + 6n + 12} - n.$$

b) Igazoljuk, hogy a fenti a_n sorozat minden tagja kisebb a fenti b_n sorozat valamennyi tagjánál. (16 pont)

6. A térbeli derékszögű-koordináta-rendszerben felvesszünk 3 piros pontot: $A(1; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, és $C(3; 0; 0)$, valamint 3 fehér pontot: $D(0; 1; 0)$, $E(0; 2; 0)$, és $F(0; 3; 0)$, valamint 3 zöld pontot: $G(0; 0; 1)$, $H(0; 0; 2)$, és $I(0; 0; 3)$.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk a kilenc pont közül hármat úgy, hogy a kiválasztott pontok egy háromszög csúcsai legyenek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kapott háromszögnek vannak azonos színű csúcsai?

b) A kilenc pont közül válasszunk ki úgy néhányat, hogy az általuk meghatározott test térfogata a lehető legnagyobb legyen. Mely csúcsokat válasszuk ki, és mekkora lesz ekkor a kérdéses térfogat? (16 pont)

7. Tekintsük a derékszögű koordináta-rendszerben a következő két kört:

$$k_1: x^2 + 4x + y^2 + y = 2 \quad \text{és} \quad k_2: x^2 - 6x + y^2 - 4y = 12.$$

Mekkora annak a síkrésznek a területe, amelyet mind a két kör lefed?

(16 pont)

8. A p paraméter mely értékeire lesz a

$$px^2 - (p-1)x - \frac{3}{4}p + \frac{1}{2} = 0$$

a) egyenletnek egy megoldása;

b) egyenletnek két megoldása, az egyik pozitív, a másik negatív;

c) egyenletnek gyöke a -3 ;

d) egyenlet gyökeinek az aránya $1 : 2$?

(16 pont)

9. Kati „peches”-számai a 3-as és a 7-es.

Egy nap 1-től kezdve elkezdte felírni a pozitív egészeket, de azokat a számokat, amikben volt hármas, vagy hetes jegy kihagyta.

a) Milyen számjegyekből áll a Kati által felírt 2015-dik szám?

b) Hanyadik számként írta fel Kati a 2015-ös számot?

(16 pont)