**I. megoldás.** Tegyük fel, hogy a $P_1, \ldots, P_k$ pontok indexük növekvő sorrendjében helyezkednek el. Jelöljük a $P_iP_j$ $(i \neq j)$ pontpár fölé rajzolt kört $K_{ij}$-vel, és rendeljük hozzá minden $P_t$ ponthoz azon $K_{ij}$ körök színeinek halmazát, melyekre $i < j$. Így minden ponthoz hozzárendeltük az $n$ szín egy részhalmazát. Mint ismeretes, egy $n$ elemű halmaznak $2^n$ különböző részhalmaza van, így ha $k > 2^n$, létezik olyan $1 \leq q < r \leq k$, hogy a $P_q$ és $P_r$ pontokhoz ugyanazon színekből álló részhalmazt rendeltük. Szemléletesen fogalmazva a $P_q$ és $P_r$ pontokba ugyanolyan színű körök „érkeznek jobbról". Ekkor a $K_{qr}$ kör és az összes $K_{rm}$ $(r < m)$ kör kívülről érinti egymást, és ez utóbbi körök között a fentiek szerint biztosan létezik a $K_{qr}$ körrel azonos színű.

*Csikós Zsolt* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

**II. megoldás.** Az állítást $n$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén $k > 2$, tehát van legalább egy kívülről érintkező körpáros, és ezek egyforma színűek.

Tegyük fel, hogy $(n-1)$-re igaz az állítás, belátjuk, hogy $n$-re is teljesül.

Tekintsük a $k > 2^n$ pontból és a hozzájuk tartozó $n$ színnel kiszínezett körökből álló rendszert. Válasszunk ki ebben egy színt, nevezzük ezt kéknek, és tegyük fel, hogy a pontok az egyenesen balról jobbra, indexük növekedő sorrendjében helyezkednek el.

Megmutatjuk, hogy ha nincs két egymást kívülről érintő kék kör, akkor van a pontoknak egy legalább $k/2$ pontból álló részrendszere, amelyben nincs kék kör.

Legyen $H_1$ azoknak a $P_i$ pontoknak a halmaza, amelyekhez létezik olyan hogy $r < i$, hogy $K_{r,i}$ színe kék. $H_2$ legyen azoknak a $P_j$ pontoknak a halmaza, melyekhez létezik olyan $s > j$, hogy $K_{j,s}$ színe kék, $H_3$ pedig azoké, melyekből egyáltalán nem indul ki kék kör.

Világos, hogy $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ az összes pontot tartalmazza. Feltehetjük, hogy $H_1$-ben legalább annyi pont van, mint $H_2$-ben (ellenkező esetben e kettőt felcserélhetnénk). Így a $H = H_1 \cup H_3$ halmaz tartalmazza a pontoknak legalább felét, azaz legalább $\left[\dfrac{k+1}{2}\right] > 2^{n-1}$ pontot. Ha két $H_1$-beli $P_x$ és $P_y$ pontra $(x < y)$ illeszkedő $K_{x,y}$ kör kék színű volna, akkor ez a kör kívülről érintené a $P_x$ ponton átmenő, $P_x$-től balra eső kék színű kört. (Ilyen van, mert $P_x \in H_1$.) Így két $H_1$-beli pontot nem köt össze kék kör. Tehát a $H$-beli pontok fölé rajzolt körök között egyáltalán nincs kék, hiszen $H_3$-beli ponton nem megy át kék kör. A $H$-beli pontokat összekötő körök $(n-1)$ színnel vannak színezve, így az indukciós feltétel szerint létezik közöttük két egyforma színű, egymást kívülről érintő kör. Ezek természetesen részei a kiindulási, $k$ pontot tartalmazó rendszernek, így az állítást igazoltuk.

*Szegedy Patrik* (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Megmutatjuk, hogy $k = 2^n$ esetén már létezik olyan színezés, melyben nincs két egymást kívülről érintő, azonos színű kör. $n = 1$ esetén ez nyilván teljesül, hiszen egyetlen körről van szó. Feltéve, hogy ez az állítás igaz $(n-1)$-re, bizonyítjuk $n$-re.

Tekintsük a $2^n$ pontból és az őket összekötő körökből álló rendszert. Jelöljük az egyenesen balról az első $2^{n-1}$-pontot rendre $R_1, R_2, \ldots, R_{2^{n-1}}$-gyel, a pontok másik felét pedig rendre $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2^{n-1}}$-gyel. Mind a két rész pontjaira illeszkedő körök kiszínezhetők a feltevés szerint $(n-1)$ színnel. Az $n$-edik színt pedig arra használjuk, hogy a két részrendszert összekötő $R_iQ_j$ köröket színezzük. Így nem jön létre két egymást kívülről érintő $n$-edik színű kör, mert az $R_i$ pontokból csak jobbra, a $Q_j$ pontokból csak balra indulnak ki ilyen körök.