Tegyük fel, hogy a bizonyítandó állítással ellentétben a sorozat tagjai mind racionális számok. Legyen $a_n = p_n/q_n$, ahol p_n és q_n egymáshoz relatív prím pozitív egészek. (Minden pozitív racionális szám egyértelműen írható fel ilyen alakban.) Az $a_{n+1}^2 = a_n + 1$ összefüggés szerint

$$\frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2} = \frac{p_n + q_n}{q_n}.$$

Itt mindkét oldalon tovább nem egyszerűsíthető tört áll. A számlálók és a nevezők pozitívak, az egyértelműség tehát ezekre a törtekre is fennáll, ezért nevezőik szükségképpen megegyeznek:

$$q_{n+1}^2 = q_n \quad \text{azaz} \quad q_{n+1} = q_n^{1/2}.$$

Ennek alapján

$$q_{n+1} = (q_1)^{\frac{1}{2^n}},$$

tehát $(q_1)^{\frac{1}{2^n}}$ minden pozitív egész n-re egész szám. Ez csak úgy lehetséges, ha $q_1 = 1$. Ebben az esetben $q_n = 1$ minden n-re, azaz a sorozat tagjai pozitív egész számok.

Ha a sorozat tagjai között előfordulna az 1, akkor az ezt követő tag $\sqrt{2}$ azaz irracionális lenne. Ha a sorozat tagjai között nem fordul elő 1, akkor

$$a_n^2 - a_{n+1}^2 = a_n^2 - a_n - 1 = (a_n - 2)(a_n + 1) + 1 > 0$$

alapján $a_{n+1} < a_n$. Ez viszont lehetetlen, hiszen pozitív egész számokból álló, szigorúan monoton csökkenő (végtelen) sorozat nem létezik. Ellentmondásra jutottunk, ami a feladat állítását igazolja.

Bohus Géza (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)