I. megoldás. Jelöljük a BC oldal felezőpontját F-fel. Amíg O, F és P egymástól különbözők (és A-tól is), az OPA és OPF (valódi) derékszögű háromszögekből

$$PA^2 = 0A^2 - OP^2 = OB^2 - (OF^2 - PF^2) = BF^2 + PF^2 = \frac{BC^2}{4} + PF^2,$$

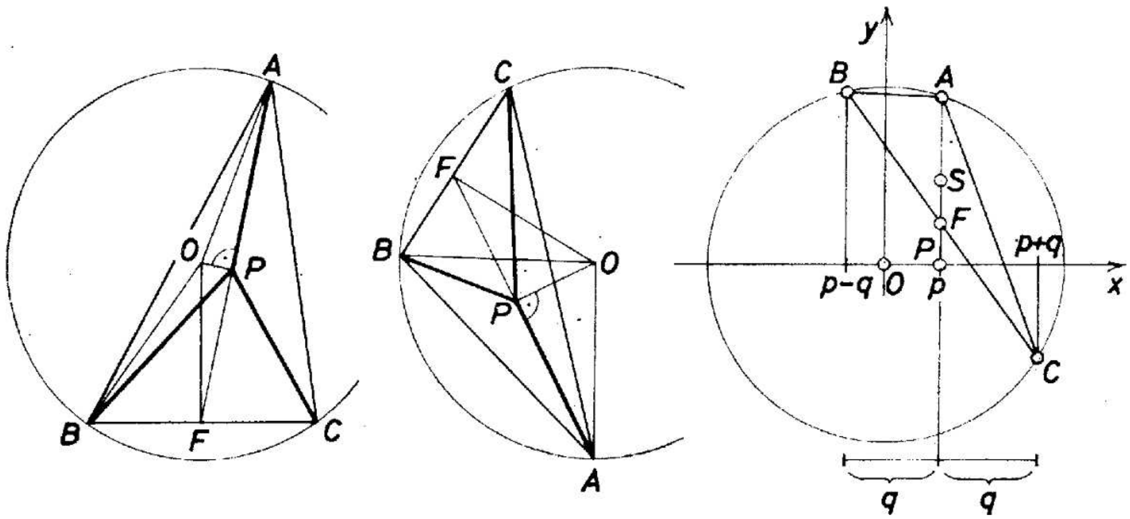
hiszen $OA = OB$. Vegyük észre, hogy itt PF a PBC háromszög P-ből induló súlyvonala, tehát ismert összefüggés szerint

$$PF^2 = \frac{1}{4}(2PB^2 + 2PC^2 - BC^2),$$

ezt beírva

$$PA^2 = \frac{1}{2}(PB^2 + PC^2),$$

szavakban: PA négyzetes közepe a PB, PC hosszúságoknak.



A fönt egyelőre kizárt esetekben is érvényes a talált összefüggés, de semmitmondó.

P azonos O-val, ha AF egyenes átmegy O-n, és ekkor a háromszög egyenlő szárú: $AB = AC$, a vizsgált 3 hosszúság egyenlő. És akkor is ez áll, ha mindjárt F azonos O-val, vagyis a kiindulási háromszögben A-nál derékszög van. (F és P egybeesése lehetetlen az O-tól különböző pontban.)

Megjegyzés. A súlyvonalra felhasznált kifejezés bizonyítható abból, hogy paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével; ez pedig a Pitagorasz-tételnek az átlókra mint átfogókra való alkalmazásából, a befogók irányainak az egyik oldalpárt és a hozzájuk tartozó magasságot véve. (Kiadódik a cosinustétel alkalmazásával is, de az kerülő út.)

II. megoldás. Helyezzünk derékszögű koordináta-rendszert alakzatunkra, origóját tegyük a kör O középpontjába, ordinátatengelyét pedig állítsuk párhuzamosra az AF súlyvonallal. Ez azt jelenti, hogy A és F abszcisszája közös, jelöljük p-vel, így P koordinátái $(p, 0)$, B és C abszcisszái pedig $p-q$, $p+q$ alakúak, és körünk sugarát hosszúságegységnek választva ordinátáik is kifejezhetők. (Csak a négyzetükre lesz szükségünk.)

$$\begin{aligned} PA^2 &= 1 - p^2, \\ PB^2 &= q^2 + \left(1 - (p-q)^2\right) = 1 + 2pq - p^2, \\ PC^2 &= q^2 + \left(1 - (p+q)^2\right) = 1 - 2pq - p^2. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy innen

$$2pq = PB^2 - PA^2 = PA^2 - PC^2,$$

tehát

$$PB^2 + PC^2 = 2 \cdot PA^2.$$

Rátz Ákos (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)