# Megoldásvázlatok a 2013/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

## I. rész

**1.** *Az iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. Amikor 42 partit lejátszottak, akkor még mindenkinek négy volt hátra. Hányan szerepeltek ezen a bajnokságon?* (*11 pont*)

**Megoldás.** Legyen a szereplők száma $n$. Az összes mérkőzések száma: $\frac{n(n-1)}{2}$. Ha mindenkinek még 4 játék van hátra, az összesen $\frac{4n}{2}$ még lejátszandó partit jelent. Ezért a lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2}-\frac{4n}{2}=42,$$

amiből az $n^2-5n-84=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A gyökök: $n_1=12$, $n_2=-7$.

Vagyis 12 fő szerepelt a bajnokságon.

**2.** *Ábrázoljuk a következő függvényeket:*

*a) az*
$$f(x)=|x+2|+|x-1|$$
*hozzárendeléssel megadottat a* $[-2;1]$ *intervallumon;*

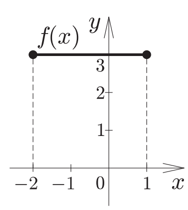
*b) a*
$$g(x)=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\sin x\cos x$$
*hozzárendeléssel megadottat a* $[-\pi;\pi]$ *intervallumon;*

*c) a*
$$h(x)=\log_{2013}x\cdot\log_x 2014\cdot\log_{2014}2013$$
*hozzárendeléssel megadottat a* $]0;3]$ *intervallumon.* (*13 pont*)

**Megoldás.** *a)* A megadott $[-2;1]$ intervallumon így írhatjuk az $f$ függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x)=|x+2|+|x-1|=(x+2)-(x-1)=3.$$

Vagyis ezen az intervallumon a függvény konstans, a mellékelt *ábrán* látható a képe.

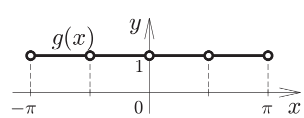



*b)* A $g$ függvény hozzárendelési szabályát át tudjuk alakítani:

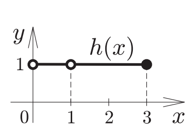
$$g(x)=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)\sin x\cos x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin x\cos x=\sin^2x+\cos^2x=1.$$

A $\operatorname{tg}x$ és a $\operatorname{ctg}x$ miatt $x\neq\frac{k\pi}{2}$, ahol $k$ egész számot jelöl.

A megadott $[-\pi;\pi]$ intervallumra esik a $k=-1$; 0; 1 esetén kapott érték, vagyis a $g$ függvény nincs értelmezve a $-\pi$, 0 és $\pi$ helyeken, egyébként a függvény konstans. A mellékelt *ábrán* látható a képe.




*c)* A logaritmus definíciója alapján tudjuk, hogy $x$ pozitív valós szám, de nem egyenlő 1-gyel.



A $h$ függvény hozzárendelési szabályában minden logaritmust átírhatunk 2013-as alapra:

$$h(x) = \log_{2013} x \cdot \log_x 2014 \cdot \log_{2014} 2013 =$$
$$= \log_{2013} x \cdot \frac{\log_{2013} 2014}{\log_{2013} x} \cdot \frac{\log_{2013} 2013}{\log_{2013} 2014} = \log_{2013} 2013 = 1.$$

**3.** *Oldjuk meg az egyenletet, ahol $n$ tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám:*

$$\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} + \ldots + \sqrt{x^2+nx-(n+1)} = 0. \qquad \textit{(13 pont)}$$

**Megoldás.** Az egyenlet bal oldalán $n$ tagú összeg szerepel, az összeg minden tagja nemnegatív valós szám. Nemnegatív valós számok összege csak úgy lehet nulla, ha mindegyik nulla.

A négyzetgyökök alatt álló másodfokú kifejezéseknek megkeressük külön-külön a zérushelyeit. Kezdjük az általános taggal, az $x^2 + nx - (n+1)$-gyel. Mivel a két zérushely összege $-n$, szorzata pedig $-(n+1)$, azért a zérushelyek: $x_1 = -(n+1)$, $x_2 = 1$. Vagyis minden tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész $n$ szám esetén a másodfokú kifejezések egyik zérushelye az 1 lesz.

Ezek szerint az egyenlet egyedüli megoldása az 1.

**4.** *Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $A(-7;5)$ pont, továbbá az $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 17$ egyenletű kört az $E(-2;2)$ pontban érinti.* *(14 pont)*

**Megoldás.** Az adott kör középpontjának koordinátái: $K(2;3)$. A keresett kör középpontja rajta van az $E(-2;2)$ és a $K(2;3)$ pontokra illeszkedő egyenesen. Ennek az egyenesnek az irányvektora: $\overrightarrow{EK}(4;1)$, vagyis az egyenlete: $x - 4y = -10$. A keresett körnek $AE$ a húrja, ezért a kör középpontja illeszkedik az $A(-7;5)$ és az $E(-2;2)$ pontok által meghatározott húr felezőmerőlegesére is. A húr felezőpontja: $F\left(-\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)$, a húrfelező egyenes normálvektora: $\overrightarrow{AE}(5;-3)$, vagyis az egyenlete: $5x - 3y = -33$.

A két egyenes metszéspontjának koordinátáit a következő egyenletrendszer megoldásával kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x - 4y &= -10 \\ 5x - 3y &= -33 \end{aligned}\right\}.$$

Vagyis a kör középpontjának koordinátái: $C(-6;1)$.

A keresett kör sugarának hosszát is kiszámíthatjuk, az $A(-7;5)$ és a $C(-6;1)$ pontok távolságaként:

$$r = AC = \sqrt{(-7+6)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}.$$

A keresett kör egyenlete:

$$(x+6)^2 + (y-1)^2 = 17.$$

## II. rész

**5.** *Az $ABC$ egyenlő szárú háromszög $AB$ alapja* 26 cm, *a szárai* 85 cm *hosszúak. Legyen az $AB$ alap felezőpontja $F$, a beírt körének a középpontja $K$, a köré írt körének a középpontja $O$, a súlypontja $S$, a magasságpontja $M$.*

*a) Mekkora az $ASO$ háromszög kerülete?*

*b) Milyen hosszú az $FK$ szakasz?*

*c) Mekkora az $MF$ szakasz hossza, és mekkora szögben látszik az $AC$ szár az $M$ pontból?* *(16 pont)*

**Megoldás.** *a)* Az $ASO$ háromszög $OS$ oldalának hosszát az $FO$ és az $FS$ szakaszok különbségeként kapjuk. A feladatban szereplő $F$, $K$, $O$, $S$, $M$ és $C$ pontok egy egyenesre illeszkednek, a $C$ csúcsból húzott magasságra, hiszen az $ABC$ háromszög egyenlő szárú. Ennek a magasságnak a hosszát Pitagorasz-tétellel kiszámítjuk az $ACF$ derékszögű háromszögből:

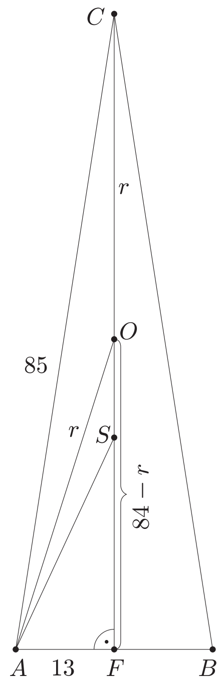
$$13^2 + CF^2 = 85^2, \quad \text{azaz} \quad CF = 84 \text{ cm}.$$

Mivel a súlypont a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont (és most $CF$ súlyvonal), így $FS = 28$ cm.

A háromszög köré írt köre az alap egyenesétől $84 - r$ távolságra van, ahol $r$ a körülírt kör sugara. Az $AFO$ háromszögben Pitagorasz-tétellel (*1. ábra*):

$$13^2 + (84-r)^2 = r^2,$$
$$13^2 + 84^2 - 2 \cdot 84r = 0,$$

ebből $r = \dfrac{7225}{168} \approx 43{,}01$ (cm).



1.ábra

Vagyis

$$FO = 84 - \frac{7225}{168} = \frac{6887}{168} \approx 40{,}99 \text{ (cm)}.$$

Ezek alapján:

$$OS = FO - FS = \frac{6887}{168} - 28 = \frac{2183}{168} \approx 12{,}99 \text{ (cm)}.$$

$AO = r$, az $AS$ szakasz hosszát az $ASF$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$13^2 + 28^2 = AS^2, \quad \text{azaz} \quad AS = \sqrt{953} \approx 30{,}87 \text{ (cm)}.$$

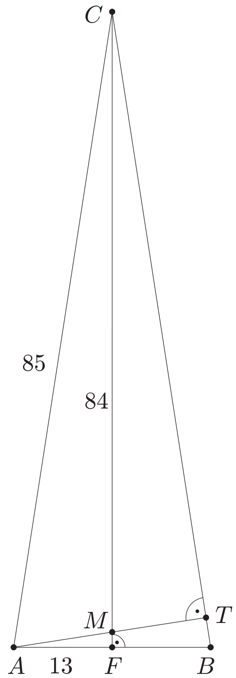
Tehát az $ASO$ háromszög kerülete:

$$k = OS + AS + AO = 12{,}99 + 30{,}87 + 43{,}01 = 86{,}87 \text{ (cm)}.$$

*b*) A beírt kör középpontja az alaptól $\varrho$ távolságra van (ahol $\varrho$ a beírt kör sugarának a hossza), ezért a beírt kör sugarát meghatározhatjuk az $ABC$ háromszög területének kétféle felírásából: $t = \varrho s = \frac{c \cdot m_c}{2}$, ahol $s$ a háromszög kerületének a fele: $s = \frac{2 \cdot 85 + 26}{2} = 98$. Ekkor $98\varrho = 1092$, ebből

$$\varrho = \frac{1092}{98} = \frac{78}{7}.$$

Tehát a beírt kör középpontja az alap egyenesétől $\frac{78}{7}$ ($\approx 11{,}14$) cm-re van.



2.ábra

$c$) Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Meghatározzuk a szárhoz tartozó $AT$ magasság hosszát. Írjuk fel az $ABC$ háromszög területének kétszeresét kétféleképpen:

$$2 \cdot t = 26 \cdot 84 = 85 \cdot AT, \qquad AT = \frac{2184}{85}.$$

Az $ATB$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel:

$$TB = \sqrt{26^2 - \left(\frac{2184}{85}\right)^2} = \frac{\sqrt{114\,244}}{85} = \frac{338}{85}.$$

Mivel $AFM\triangle \sim ATB\triangle$ (a szögeik páronként egyenlők), azért a megfelelő oldalak aránya egyenlő:

$$\frac{MF}{13} = \frac{\frac{338}{85}}{\frac{2184}{85}}, \quad \text{vagyis} \quad MF = \frac{169}{84} \approx 2{,}01 \text{ (cm)}.$$

Mivel a keresett $CMA$ szög az $AMF$ derékszögű háromszög $M$ csúcsánál található külső szöge, azért meghatározzuk az $M$-nél lévő $\delta$ belső szöget:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{13}{\frac{169}{84}} = \frac{84}{13}, \qquad \delta \approx 81{,}2^\circ.$$

Vagyis a keresett $CMA$ szög nagysága: $98{,}8^\circ$.

**6.** *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:*

$$\left.\begin{aligned} 3^{3x-1} &= 2y^3 - 11y - 693 \\ x &= \log_3 (y+1) \end{aligned}\right\}. \qquad (16\ pont)$$

**Megoldás.** A feladat értelmezési tartománya: $x$ tetszőleges, $y > -1$ egész szám. A második egyenlet szerint: $3^x - 1 = y$. Ekkor:

$$3^{3x-1} = \frac{(3^x)^3}{3} = \frac{(y+1)^3}{3},$$

Ezt az első egyenletbe beírva:

$$\frac{(y+1)^3}{3} = 2y^3 - 11y - 693. \qquad 0 = 5y^3 - 3y^2 - 36y - 2080.$$

Tudjuk, hogy $y$ olyan nemnegatív egész szám, hogy egy háromhatványnál 1-gyel kisebb.

Írjuk a harmadfokú egyenletet a következő alakban: $2080 = y\left(5y^2 - 3y - 36\right)$. A zárójelben szereplő tényező egész szám, ezért $y$ a 2080 osztója kell, hogy legyen.

A fentieket felhasználva $y$ lehetséges értékei: 2, 8, 26, 80. Ezeket behelyettesítve a harmadfokú egyenletbe kapjuk, hogy csak az $y=8$ a gyöke.

Visszahelyettesítéssel: $x=2$. Vagyis az egyenletrendszer egyedüli megoldása: $x=2$, $y=8$.

*Megjegyzés.* Az $y=8$ ismeretében a harmadfokú egyenletet

$$0=(y-8)\big(5y^2+37y+260\big)$$

alakra tudjuk hozni. Így is látható, hogy csak egy megoldása lesz az egyenletrendszernek (hiszen a másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív).

**7.** *a) Határozzuk meg az*

$$f(x)=x^2-10x+27$$

*függvény integrálját a* $[3;6]$ *intervallumon.*

*b) Mennyivel kell a megadott intervallumot eltolni, hogy az integrál* 18 *legyen?*

(*16 pont*)

**Megoldás.** *a*)

$$\int_3^6 \big(x^2-10x+27\big)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+27x\right]_3^6=72-180+162-9+45-81=9.$$

*b*) Legyen az eltolás nagysága negatív irányba $d$. Ekkor a következő integrált írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}&\int_{3-d}^{6-d}\big(x^2-10x+27\big)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-5x^2+27x\right]_{3-d}^{6-d}=\\&=\frac{(6-d)^3}{3}-5(6-d)^2+27(6-d)-\frac{(3-d)^3}{3}+5(3-d)^2-27(3-d)=\\&=3d^2+3d+9=18.\end{aligned}$$

Vagyis a $d^2+d-3=0$ másodfokú egyenlet megoldásait kell megadnunk:

$$d_{1;2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}.$$

Tehát az intervallumot eltolhatjuk $d_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\approx 1{,}3$, illetve $d_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\approx -2{,}3$ egységgel.

*Megjegyzés.* Az *a*) kérdésre adott válaszunk alapján látható, hogy a *b*) kérdésben az fogalmazódott meg, hogy az integrál értéke duplázódjon meg az eltolás hatására. A kérdésben természetesen azért szerepel 18, mert az első kérdésre rosszul válaszolók így erre a kérdésre jó választ adhatnak.

**8.** *Adott a következő számsokaság:* 1, 1, 2, 4, 8, 8, 8, 9, 13.

*a) Igazoljuk a fenti számsokaság esetén, hogy a számtani közepénél kisebb számok tőle számított távolságainak az összeg ugyanakkora, mint a nála nagyobb számok tőle számított távolságainak az összege.*

*b) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított abszolút távolságainak összege minimális.*

*c) Adjuk meg a fenti számsokasághoz azt a középértéket, amelyhez a számadatok tőle számított távolságainak négyzetösszege minimális.*

(*16 pont*)

**Megoldás.** *a*) A számsokaság számtani közepe:

$$\overline{x}=\frac{1+1+2+4+8+8+8+9+13}{9}=6.$$

A számtani középnél kisebb számok tőle számított távolságainak összege:

$$(6-1)+(6-1)+(6-2)+(6-4)=16.$$

A számtani középnél nagyobb számok tőle számított távolságainak összege:

$$(8-6)+(8-6)+(8-6)+(9-6)+(13-6)=16.$$

Vagyis a két összeg valóban ugyanakkora.

*b*) A szöveg alapján azt az $x$ számot keressük, amelyre a következő összeg minimális:

$$f(x) = |1-x| + |1-x| + |2-x| + |4-x| + |8-x| + |8-x| + |8-x| + |9-x| + |13-x|.$$

Nézzük először az $f_1(x) = |1-x| + |13-x|$ hozzárendelésű függvényt.

Ha $x < 1$, akkor $f_1(x) = 1 - x + 13 - x = -2x + 14$.

Ha $1 \leq x \leq 13$, akkor $f_1(x) = -1 + x + 13 - x = 12$.

Ha $13 < x$, akkor $f_1(x) = -1 + x - 13 + x = 2x - 14$.

Ezek alapján elkészíthetjük az $f_1$ képét. Az $f_1$ minimumhelyeinek halmaza: $[1; 13]$.

Hasonlóan tudjuk ábrázolni közös koordinátarendszerben az

$$f_2(x) = |1-x| + |9-x|,$$
$$f_3(x) = |2-x| + |8-x|,$$
$$f_4(x) = |4-x| + |8-x|$$

hozzárendeléssel adott függvényeket, végezetül pedig az

$$f_5(x) = |8-x|$$

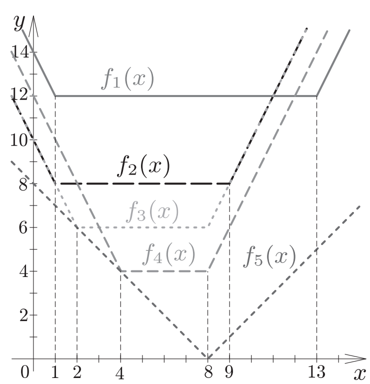
hozzárendeléssel adott függvényt is.

Az $f_2$ minimumhelyeinek halmaza: $[1; 9]$.

Az $f_3$ minimumhelyeinek halmaza: $[2; 8]$.

Az $f_4$ minimumhelyeinek halmaza: $[4; 8]$.

Az $f_5$ minimumhelyének halmaza: $\{8\}$.




Mivel

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + f_5(x), \quad \text{és} \quad [1; 13] \supset [1; 9] \supset [2; 8] \supset [4; 8] \supset \{8\},$$

azért a keresett minimumhely a 8. A keresés során az is kiderült, hogy a kapott szám pontosan a számsokaság mediánja.

*c*) A szöveg alapján azt az $x$ számot keressük, amelyre a következő összeg minimális:

$$f(x) = (1-x)^2 + (1-x)^2 + (2-x)^2 + (4-x)^2 + (8-x)^2 + (8-x)^2 + (8-x)^2 + \\ + (9-x)^2 + (13-x)^2.$$

Ezt a következő alakban is írhatjuk:

$$f(x) = 9x^2 - 2(1+1+2+4+8+8+8+9+13)x + \\ + \left(1^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 8^2 + 8^2 + 9^2 + 13^2\right).$$

Tudjuk, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ (ahol $a > 0$) hozzárendeléssel megadott másodfokú függvény minimumhelye: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Jelen esetben:

$$x = -\frac{-2(1+1+2+4+8+8+8+9+13)}{2 \cdot 9} = \frac{1+1+2+4+8+8+8+9+13}{9} = 6.$$

Vagyis a keresett minimumhely a 6.

A keresés során az is kiderült, hogy a kapott szám pontosan a számsokaság számtani közepe.

**9.** *Határozzuk meg azt a hegyesszöget, amelyre a*

$$\frac{4\sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + 1}{\sin^2 x}$$

*kifejezés minimális. Mennyi ez a legkisebb érték?* (*16 pont*)

**Megoldás.** Hegyesszögek esetén a kifejezés értelmezve van. Alakítsuk a kifejezést a következő módon:

$$\frac{4\sin^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + 1}{\sin^2 x} = 4 - 4\cos^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = 4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

A $4\sin^2 x$ és az $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ minden hegyesszög esetén pozitív valós szám.

Ismerjük két pozitív valós számra a mértani és a számtani közép közötti összefüggést: $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$. Egyenlőség $a = b$ esetén van. Alkalmazzuk ezt az $a = 4\sin^2 x$ és a $b = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ értékekre:

$$\sqrt{4\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} \le \frac{4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}}{2},$$

amit így írhatunk:

$$2 \cdot \sqrt{4\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} = 2 \cdot 2 \le 4\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tehát a minimális érték 4, ami

$$4\sin^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

esetén lép fel. Ekkor $4\sin^4 x = 1$, vagyis $\sin x = \pm 1$. Mivel $x$ hegyesszög, azért $x = \dfrac{\pi}{4}$.

*Megjegyzés.* A $2\left(2\sin^2 x + \dfrac{1}{2\sin^2 x}\right)$ egy pozitív szám és reciprokának összegének a kétszerese, ami akkor minimális, ha a szám 1.