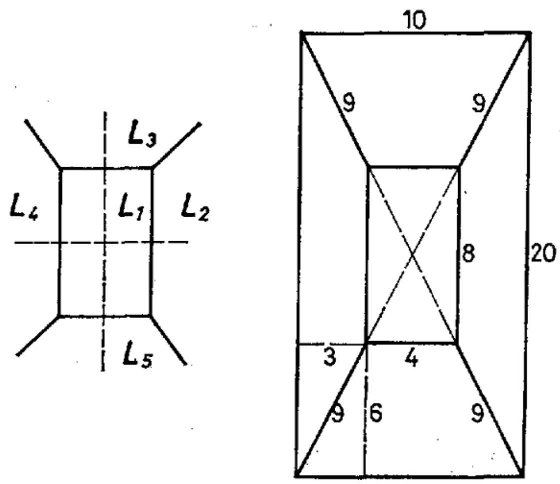
A test lapjainak az a) követelményre tekintettel 3 vagy 4 vagy 5 oldaluk van. A d) előírás *szemben fekvő* oldalakról szól a c) szerinti lappal szomszédos lapokon – vagyis legalább 3 lapon –, ezeken tehát páros, azaz 4 az oldalak száma. De akkor van további négyszöglap is, mert síklapokkal határolt testen a páratlan oldalszámú lapok száma páros – ami itt már csak 2 vagy 0 lehet. Valóban, lapról lapra összeadva az oldalak számát, az összeg az élek számának 2-szerese, páros szám, ezért a páratlan összeadandók száma páros.

Az S_1 és S_2 szimmetriasíkok merőlegesen állnak egymásra. Így ugyanis mindegyiknek a másikra való tükörképe önmaga, különben pedig – akár párhuzamosak volnának, akár hegyes szöget zárnának be egymással – S_1-nek S_2-re való tükörképe, az S_1^* sík új, meg nem engedett szimmetriasík lenne (lásd a megjegyzést). Legyen S_1 és S_2 metszésvonala t.

Önmagába megy át a test akkor is, ha előbb S_1-re, majd S_2-re tükrözzük; az eredmény az, mintha elforgatjuk t mint tengely körül 180°-kal.

Ezek szerint a test egy csúcsának, élének, lapjának általában 3 tőle különböző képe van, a tükrösen rokon elemek 4-esével felelnek meg egymásnak. Ha azonban egy csúcs vagy él benne van S_i-ben, ha egy él vagy lap merőleges S_i-re ($i = 1$ vagy 2), akkor ennek az elemnek arra a síkra való képe maga az illető elem, így csak a másik síkra való képe különböző tőle. Ha pedig a t-n van rajta egy csúcs, illetve ha a t-re merőleges egy él vagy egy lap síkja, ennek az elemnek nincs önmagától különböző képe. (Él nem lehet t-ben a konvexség miatt.)



1. ábra

Nevezzük az ilyen szimmetrikus együtteseket röviden *klikkeknek*. (A szó hétköznapi jelentéséhez képest némi hasonlóság mutatkozik elemeik összetartozásában és mások kizárásában.) Esetünkben tehát a test minden egyes csúcsa, éle, lapja a szimmetria szempontjából vagy egy 4- vagy egy 2- vagy pedig egy 1-elemű klikkbe tartozik bele. Speciális esetek: 2-elemű lapklikk elemeiből a „másik" S_i sík szimmetriatengelyt metsz ki; hasonlóan a t-re merőleges lapnak két szimmetriatengelye és szimmetriacentruma van.

Szeleteljük végig a testet a t-re merőleges M síkokkal, a leírt szimmetriák e metszetekben is megmutatkoznak. (A tengelyt függőlegesnek tekintjük.)

I. Vegyük elsőnek azt az esetet, ha M-nek mindjárt az „első kontaktusában" (meginduló helyzetében) egy L_1 lapot kapunk M és a test közös részeként. Ez kéttengelyű idom, tehát négyszög, oldalai mentén csatlakoznak az $L_2 - L_5$ lapok.

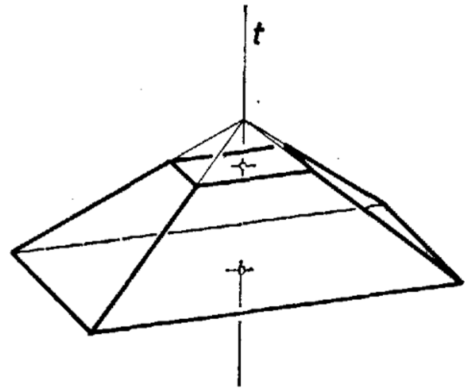
1. Ha L_1 téglalap – vagyis csúcsai 4-elemű klikket alkotnak, élei pedig két 2-elemű klikket –, akkor az utóbbiak révén $L_2 - L_5$ is két 2-elemű lapklikket alkot, az L_1 csúcsaiból induló harmadik élek pedig 4-elemű élklikket (1. ábra). (További él nem indulhat L_1 csúcsaiból, mert 1–1 ilyen további 4 lapot jelentene.) Így az utolsó lap, L_6 klikkje ismét 1-elemű, ezért merőlegesen áll t-re, tehát ez is négyszög és párhuzamosan áll L_1-gyel. Eszerint $L_2 - L_5$ síkjai párhuzamos élekben metszik L_2 és L_6 síkját, az $L_2 - L_5$ lapok trapézok, L_6 pedig szintén téglalap.

Mindez csak úgy egyeztethető össze a méretkövetelményekkel, hogy a c) és e) lapok L_1, és L_6, a d)-lapok pedig szimmetrikus trapézok, száraik 9 egységnyiek; a test csonkagúlaszerű.

Valóban csonkagúlát kapunk a $10 : 20 = 4 : 8$ egyenlőség alapján, ha a két téglalap hosszú oldalai állnak párhuzamos párokban, mert ekkor a trapézszárak meghosszabbításai t-ben metszik egymást. Az alapokra való vetületük hossza

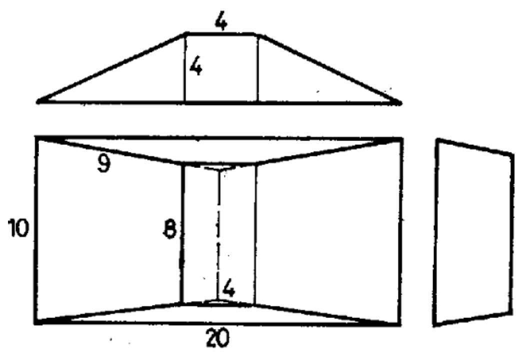
$$\sqrt{\left(\frac{20-8}{2}\right)^2 + \left(\frac{10-4}{2}\right)^2} = \sqrt{45},$$

a párhuzamos lapok távolsága $\sqrt{81-45} = 6$ egység, a térfogat az ismert képlet szerint 624 térfogategység (2. ábra).

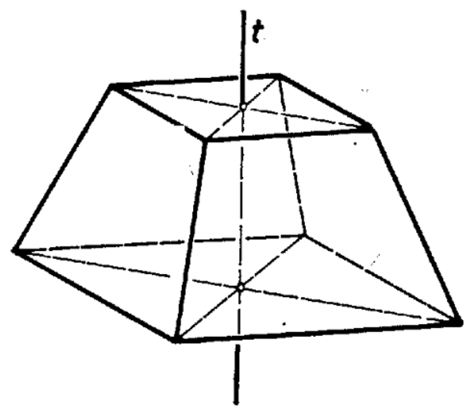


2. ábra

Ha a 4 × 8-as kis alapot úgy állítjuk, hogy 4-es oldala a nagy alap 20-as oldalával legyen párhuzamos, akkor a párhuzamos lapok távolsága hasonló számítással 4 egység. Két-két szomszédos oldalél páronként metszi egymást, de már hármuknak sincs közös pontjuk. A 4 × 8-as alap élein átmenő (függőleges) síkokkal 9 részre darabolva a testet, közülük 1 téglatest lesz, 4 rész gúla, egybevágók, alapjuk téglalap (ez is egy klikk), és 4 rész az oldallapján fekvő 3 oldalú hasáb (páronként egybevágók, alaplapjaik derékszögű háromszögek). E részek összegeként a térfogat 442 2/3 egység, kisebb az előbbinél (3. ábra).



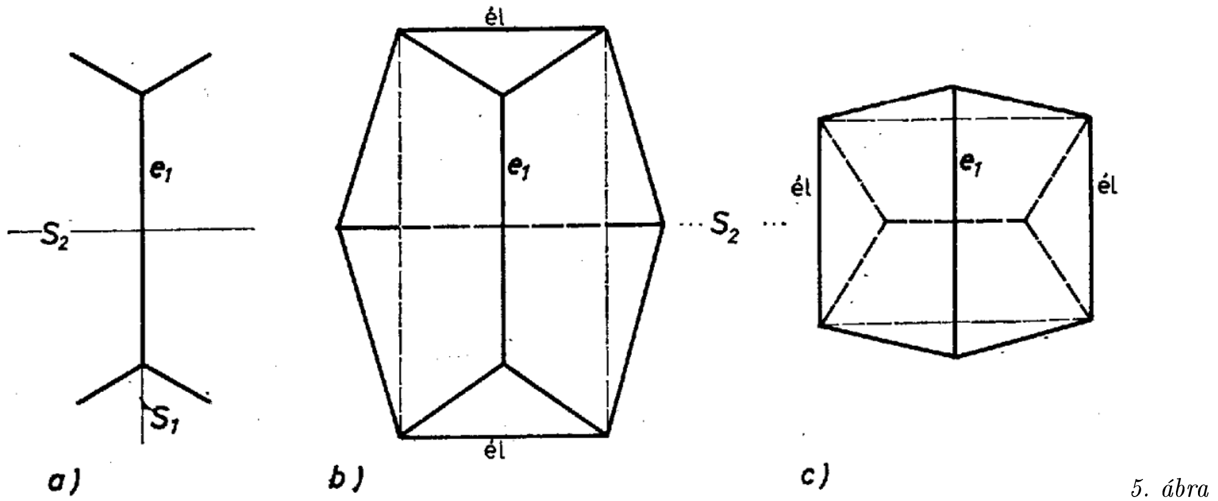
3. ábra



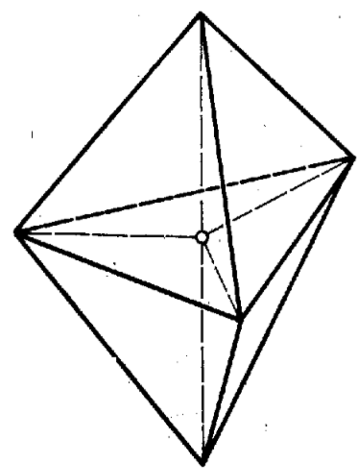
4. ábra

2. Lényegében ugyanígy kapjuk, hogy a szimmetriakövetelményt az olyan 6 lapú testek is teljesítik, amelyeknek L_1 és L_6 lapja rombusz, $L_2 - L_5$ lapjai egy klikket alkotnak; az ilyen testeken azonban legföljebb 4 különböző élméret fordulhat elő (ezek is csonkagúlák, 4. ábra).

II. Milyen testek jönnek szóba, ha M első kontaktusában egy e_1 élt kapunk? Ez 1-elemű klikk, legyen a rajta átmenő szimmetriasík S_1; végpontjai 2-elemű klikket alkotnak, a belőlük induló 2–2 él, valamint másik végpontjaik 4-eleműt (5a ábra). Negyedik él nem futhat ki e_1 végpontjaiból, mert az ilyenek S_1-ben lennének, az S_1 két oldalán 3–3 lapú testek jönnének létre csupa háromszöglapokkal. A kettős 3 oldalú szabályos gúlát az is kizárja, hogy $3 + 1$ szimmetriasíkja van (6. ábra). További, 5-élű stb. válfajok elképzelésének is a lapok 6-os száma szab korlátot.



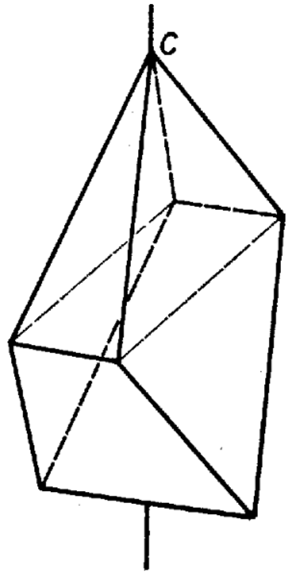
5. ábra


6. ábra

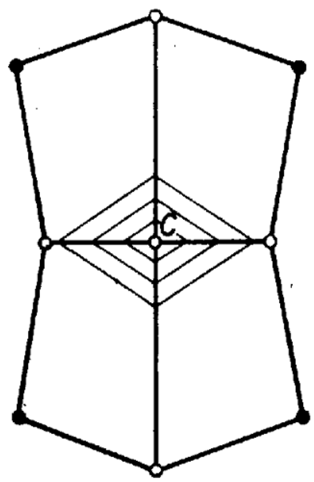
Nem lehet, hogy az 5a. ábra 4 „befejezetlen” csúcsa egy lapban legyen, vagyis az általuk meghatározott téglalap mindegyik oldala él legyen, mert így 5 lapunk lenne csak; de az sem, hogy a velük meghatározott téglalap egyik oldala sem él – hanem csupán lapbeli átló –, mert emígy az eddig megkezdett 4 lapot ismét nem lehetne 2 lappal befejezni. (Gondolja át az olvasó!) Ha viszont két oldalt tekintünk élnek a téglalapból, ennek mindkét befejezése lehetséges (a további csúcsok S_2-ben). Feladatunkban azonban nem felelnek meg, mert négyszöglapból csak 2 van rajtuk (5b és c ábra, M utolsó metszete is él, a 2 eredmény lényegében azonos).

III. Nem felel meg olyan test sem, amilyet abból a kiindulásból kapunk, hogy a metsző sík kiinduló M_1 helyzetében csak egy C csúcsot tartalmaz a testből – de ez ismét csak az élméreteken múlik. Ismét kettéválik vizsgálatunk az M_1 „utáni” metszetek téglalap, ill. rombusz volta szerint – így C mindenképpen 4-élű csúcs.

1. Tekintsük az első olyan téglalap-metszetet, amelyben van további csúcsa a testnek. Ez 4-elemű klikkbe tartozik, és ennek a téglalapnak ismét csak 2 szemben levő oldala lehet él. Ezek 2 egyenlő szárú háromszöget zárnak le, tovább pedig 4 négyszöglap adódik, ebből 2 tengelyszimmetrikus trapéz, 2 deltoid (esetleg rombusz). A 10 és 20 élméreteket a háromszögekre téve, egyikük megismétlődik a deltoidok 2 szomszédos oldalán, tehát azokon nem helyezhető el két 9 egységnyi élhossz; a négyszöglapok közül pedig egyiket sem csupa páros oldalszámú lap veszi körül (7. ábra).



7. ábra

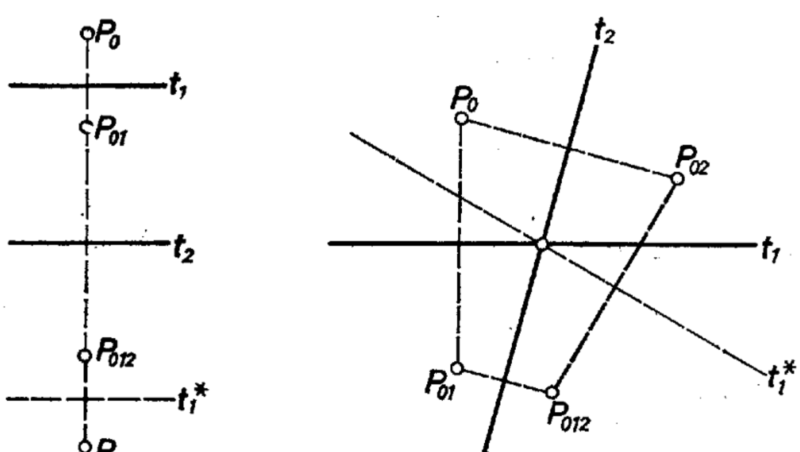


8. ábra

Az M_1 utáni rombusz-metszetek esetében a C-ből kifutó élek az S_i-kben vannak, C-ben 4 elemű lapklikk fut össze. Emiatt csak négyszögekről lehet szó, az S_i-ken kívüli 8 befejezetlen élükhöz való csatlakozásra ismét kevés a 2 hátra levő lap (8. ábra).

Minden szóba jött testtípust számba vettünk és közben a legnagyobb térfogatú testet is megadtuk.

Megjegyzések. 1. A szimmetriasíkok merőleges állását elég belátni a t-re merőleges síkon kimetszett t_1, t_2 és t_1^* szimmetriatengelyeken. Valóban, tükrözve egy P_0 pontot, valamint t_1-re való P_{01} képét a t_2-re, a keletkező P_{02} és P_{012} képek különbözők és egymásnak is képei a t_1^*-re nézve (9. ábra).



9. ábra

2. A különböző típusú (ún. topológiailag különböző) konvex 6-lapú testek száma 7, ezek különböző típusú lapjainak, csúcsainak számát, szimmetriasíkjainak, tengelyeinek legföljebb lehetséges számát az alábbi táblázat mutatja.

Az ebben az értelemben egymástól különböző konvex 7-lapok típusainak száma már több, mint 30; ott az ilyen létszámok már nem is elegendőek a típusok megkülönböztetésére.

<table>
<tr><th colspan="3">Lapok</th><th colspan="3">Csúcsok</th><th colspan="2">Szimmetria</th></tr>
<tr><th>4 oldalú</th><th>3 oldalú</th><th>5 oldalú</th><th>3 élű</th><th>4 élű</th><th>5 élű</th><th>sík</th><th>forgás-tengely</th></tr>
<tr><td>6</td><td>–</td><td>–</td><td>8</td><td>–</td><td>–</td><td>9</td><td>13</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>(kocka)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>–</td><td>6</td><td>1</td><td>–</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>–</td><td>–</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>–</td><td>1</td><td>–</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>–</td><td>4</td><td>2</td><td>–</td><td>–</td><td>1</td></tr>
<tr><td>–</td><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>–</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>–</td><td>6</td><td>–</td><td>2</td><td>3</td><td>–</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>