100 éve született Erdős Pál[1]

1. A Szent István Reálgimnázium

Hat éves szibériai hadifogságból hazatérve, itt tanított 1920-tól Erdős Pál édesapja, Erdős Lajos. *„Apuka, te tényleg öreg vagy!”* – így üdvözölte a 7 éves Pali, aki ekkor már fejben szorzott négyjegyű számokat és rég túl volt a negatív számok felfedezésén: *„Anyuka, ha 100-ból elveszünk 250-et, 0 alatt kapunk 150-et!”,* újságolta 4 éves korában.

Apuka magántanítványokat is vállalt, Vágó Márta mesélte udvarlójának, József Attilának, hogy Erdős Lajos készíti fel matek érettségire – „nagyon büdös szivarokat szív!”. Pali bácsi nem találkozott Attilával, de Apuka igen, mert ő járt Vágóékhoz Mártit tanítani – Vágóék szalonjában sok híres ember megfordult.

Pali a 9–12. osztályt végezte az Istvánban, 1930-ban érettségizett jeles eredménnyel, de – ki tudja miért – mennyiségtan írásbelije csak JÓ . . . .

2. A Középiskolai Matematikai Lapok – 1926

A KöMaL bűvkörébe vonzotta (és azóta is vonzza) a matek kedvelőket. Pali bácsi versenytársai között volt Alpár László, Grünwald (Gallai) Tibor, Hajós György, Klein Eszter, Szekeres György, Turán Pál, Wachsberger (Svéd) Márta, Weiszfeld (Vázsonyi) Endre – csak azokat említem, akiket ismertem, vagy Pali bácsi mesélt róluk. Az első Erdős Pál cikk is itt jelent meg, [1].

3. Egyetem, Városliget, Anonymus szobor 1930–1934

Az egyetemen aztán személyesen is találkozhatott sok KöMaL versenytárs. Néhányan jó – sőt, igen közeli – kapcsolatba is kerültek, egyik kedvenc találkahelyük lett a Városliget, az Anonymus szobor. Pali bácsi szavaival, *„hagyjuk a fecsegést, térjünk a lényegre”,* idézzük fel, miről beszélgettek a szobornál: Általános helyzetű pontok adottak a síkon (nincs három egy egyenesen). Ekkor

- 5 pont között mindig van konvex négyszög (Klein Eszter);
- 9 pont között mindig van konvex ötszög (Turán Pál);
- 17 pont között mindig van konvex hatszög (Szekeres György);
- $2^{n-2}+1$ pont között van-e mindig konvex n-szög???

Ezekről a kérdésekről szól Erdős és Szekeres cikke [2]. A problémát Pali bácsi „happy end” problémának keresztelte, mert Klein Eszter és Szekeres György egymásra találtak. Néhány évvel később Eszter már új néven, új helyszínről, új problémával jelentkezik a Monthlyban (lásd 5. rész): *E 449.* [1940] . . . . *Proposed by Esther Szekeres, Sanghai, China.*

4. Új bizonyítás a Csebisev-tételre

Erdős első feltűnést keltő eredménye egyetemista korából a Csebisev-tétel új bizonyítása volt [2, 4]. Aki nem ismeri a tételt, megtudhatja Pali bácsi rímeiből:

- *Chebychev said it, and I'll say it again:*
  There's always a prime between N and $2N$.
- *Elmondom újra Csebisev szavát:*
  N és $2N$ közt prímszámot találsz!
- *Csebisev szavára Erdős felelt rímmel,*
  N és $2N$ között találkozunk prímmel!

5. American Mathematical Monthly feladatok

[1] A Szent István Gimnáziumban 2013. március 25-én tartott előadás alapján.

Ez a folyóirat kicsit hasonlít a KöMaL-hoz, de hatalmas olvasóközönsége van, hiszen angolul jelenik meg. Nem csoda, hogy Pali bácsi célba vette a problémarovatot.

- *3739* [1935]. *Proposed by Paul Erdős, The University of Manchester, England.* Adott $n+1$ pozitív egész szám, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, mindegyik legfeljebb $2n$, bizonyítsuk be, hogy valamelyik osztója egy másiknak. (*Erdős gyakran adta ezt fel csodagyerekeknek, mint Bollobás, Pósa, Lovász ...*)

- ....

- *4083* [1943]. *Proposed by Paul Erdős, Princeton, N.J.* Legyen $a_1 < a_2 < \ldots < a_x \leq n$ pozitív számok tetszőleges sorozata, melyben egyik a_i sem osztója a többi szorzatának. Ekkor $x \leq \pi(n)$, ahol $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímek száma.

- *4137* [1943] *Proposed by P. Erdős, Purdue University.*

- ....

- *10282* [1993]. *Proposed by Paul Erdős, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary.*

Az összesen 114 kitűzött probléma valószínűleg világrekord. Figyeljük meg, hogy változtatta helyét a világvándor ... A 3739. feladat megoldása a volt KöMaL-os társaktól érkezett:

- *Solution by Martha Wachsberger and E. Weiszfeld, Budapest, Hungary.* Emeljük ki 2 legnagyobb hatványát a számokból, legyen
$$a_r = 2^{b_r} c,$$
ahol c páratlan. Mivel n csak páratlan pozitív egész lehet és kisebb $2n$-nél, van olyan $a_i < a_k$, amelyekhez ugyanaz a c tartozik, ezért a_i osztója a_k-nak.

6. Erdős problémák

Hány Erdős-cikk van a „probléma” szóval a cikk címében? Nem kevés, 547 – igaz, ebben a Monthly-ban kitűzött problémák is benne vannak. Pali bácsi így írt erről: *„Egy jól választott probléma rámutathat a témakör nehézségére, viszonyítási alap lehet a témakör fejlődése során. Lehet ízletes apró csemege, ami néhány élvezetes pillanatot szerez. De lehet makk is, mély és megtermékenyítő új gondolatot hordozó, melyből terebélyes tölgy nő majd.”*

Erdős szeretett pénzdíjakat kitűzni problémái megoldóinak (*„átadtam neki 100 dollár vigaszdíjat”, „tízezer dollárt szoktam ajánlani annak bizonyításáért, hogy ...”*) de a dicsőség többet ért a pénzdíjnál. Erdős szellemében a 4083-as feladat első 5 (középiskolás) megoldójának 1000 Ft tiszteletdíjat ajánlok fel, a megoldásokat `gyarfas@renyi.hu` címre kérem.

Erdős több száz problémaköréből nézzünk meg kettőt közelebbről!

6.1. Ismerősök és ismeretlenek

1. *Szimmetrikus ismeretség (ha A ismeri B-t, akkor B is ismeri A-t).*

- 6 ember között van 3 (páronként) ismerős vagy 3 (páronként) ismeretlen, de 5 ember között nem biztos.
- 18 ember között van 4 ismerős vagy 4 ismeretlen, de 17 ember között nem biztos.
- x ember között van 5 ismerős vagy 5 ismeretlen, de $x-1$ ember között nem biztos ($43 \leq x \leq 49$, és x Erdős szerint csak nagyszabású nemzetközi együttműködéssel határozható meg).
- y ember között van 6 ismerős vagy 6 ismeretlen, de $y-1$ ember között nem biztos ($102 \leq y \leq 165$, és y-t Erdős szerint soha nem fogja tudni az emberiség).
- Erdős–Szekeres 1938: 4^n ember között van n ismerős vagy n ismeretlen, de
- Erdős 1947: $2^{n/2}$ ember között ez már nem biztos!

2. *Nem szimmetrikus ismeretség (lehetséges, hogy A ismeri B-t, de B nem ismeri A-t).*

- 9 ember között van tranzitív hármas ismeretség ($A \to B$, $B \to C$, $A \to C$) vagy 3 ismeretlen, de 8 ember között nem biztos.
- 15 ember között van tranzitív hármas ismeretség vagy 4 ismeretlen, de 14 ember között ez már nem biztos.

3. *Végtelen sok ember*

- $\mathbb{N}$ a természetes számok, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ a számosságuk (megszámlálható és kontinuum).
- $|\mathbb{N}|$ ember között van $|\mathbb{N}|$ (páronként) ismerős vagy $|\mathbb{N}|$ (páronként) ismeretlen.
- $|\mathbb{R}|$ között viszont NINCS MINDIG $|\mathbb{R}|$ ismerős vagy $|\mathbb{R}|$ ismeretlen.
- $|\mathbb{N}|$ ember felsorakozhat két sorba, hogy az egyikben minden szomszéd ismerős, a másikban minden szomszéd ismeretlen (Rado, 1978).

4. $|\mathbb{R}|$ *ember,* $|\mathbb{N}|$ *reláció.*

- $|\mathbb{R}|$ ember között $|\mathbb{N}|$ reláció, mondjuk a szeretet foka $1, 2, \ldots$.
- Hánynak lesz páronként ugyanaz a szeretet-foka?
- Lehet, hogy csak kettőnek: Ha $\mathbb{R}$ elemeit végtelen $0-1$ sorozatokkal reprezentáljuk, az x, y közötti szeretet-fok lehet a legkisebb i, amelyre x és y az i-edik koordinátában különbözik.
- $|\mathbb{R}|$ ember között hányat tudunk sorba állítani úgy, hogy a szomszédoknak ugyanaz legyen a szeretet-foka?
- Három embert lehet – bárki lehet középső!
- Lehet-e négyet is találni?

Itt belép a képbe valami, ami Erdősnek nem nagyon tetszett: *„Az eldönthetetlenség csúf feje mindenfelé felbukkan, és ez sok problémánkat (Hajnal Andrással) megválaszolta vagy eldönthetetlenné tette – legtöbbször az utóbbi történt.”* Erdős itt a kontinuumhipotézis függetlenségének következményeire utal. És két Erdős tételt használva (Erdős–Kakutani, illetve Erdős–Hajnal) meglepő választ kapunk a legutóbbi problémára: a (speciális) kontinuumhipotézistől függ! Ha NINCS számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között, akkor négy embert már nem mindig lehet sorba állítani. Ha VAN számosság $|\mathbb{N}|$ és $|\mathbb{R}|$ között, akkor mindig sorba lehet állítani végtelen sok embert is. (Köszönet Komjáth Péternek a megoldásért).

6.2. Számtani sorozatok

„Hatvan éve Turánnal úgy gondoltuk, hogy az $1, 2, \ldots, n$ *számok pozitív százalékában biztos van tetszőleges hosszúságú számtani sorozat (ha* n *elég nagy).”* Pontosabban fogalmazva, tetszőleges $t > 0$ százalék és tetszőleges k sorozathossz esetén van olyan $n_0 = n_0(t, k)$ határ, hogy $n \geq n_0$ esetén teljesül a következő: akárhogy is választjuk ki az $1, 2, \ldots, n$ számok legalább t százalékát, találunk közöttük k tagú számtani sorozatot. Gondoljuk meg, hogy $n_0(100, k) = k$, $n_0(1, 2) = 101$ nyilvánvaló, de $n_0(1, 3)$ létezése már korántsem az!

„A 70-es évek elején 1000 dollárt ajánlottam érte. Szemerédi 1974-ben bebizonyította. Bizonyítása mestermű, és a bizonyítás során felfedezett regularitás lemmáját azóta sokszor alkalmazták a kombinatorikában és a gráfelméletben. Fürstenberg is bebizonyította ugyanezt 1977-ben, ergodelméletet használva. Az ő módszere is sikeres lett a kombinatorikus számelméletben. Sőt, egyre több olyan eredmény született, amelyet csak ergodelméleti úton tudtak bizonyítani (eddig).”

„Az, hogy a prímszámok tetszőleges hosszúságú számtani sorozatot tartalmaznak, támadhatatlannak tűnik” – írta Erdős 1994-ben. Ám 10 év kellett csak, hogy Tao és Green megoldja ezt, mindkét említett módszerre (Szemerédi és Fürstenberg) támaszkodva. (2012: Szemerédi Abel-díjas lett!)

A tölgy egy ága nem nő még: tetszőleges hosszúságú számtani sorozatot tartalmaz minden olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozat, amelyre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty.$$

A prímszámok sorozatára ez igaz – Erdős mesélte, hogy *„Apuka ezt nem tudta …”*. *„5000 dollárt ajánlok a bizonyításért (vagy cáfolatért). Sem Szemerédi, sem Fürstenberg módszere nem tudja ezt eldönteni, de talán a következő évszázad során kiderül.”*

Akár kiderül, akár nem, az Erdős által ültetett makkokból növekedő tölgyfák körülöttünk lesznek.

Hivatkozások

[1] Erdős P.: A magasabb rendű számtani sorokról, *Köz. Mat. Lapok* (1929), 187–189.

[2] P. Erdős, G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.,* **2** (1935), 463–470.

[3] P. Erdős: Beweis eines Satzes von Tschebyschef, *Acta Litt. Sci. Szeged,* **5** (1932), 194–198.

[4] Kalmár László: Gyertek bizonyítsuk be Csebysev tételét! I. rész. *KöMaL* (1948/2), 89–90. II. rész. *KöMaL* (1948/5), 127–128. III. rész. *KöMaL* (1948/9), 176–182.

Gyárfás András

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet