Megoldásvázlatok a 2013/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Számadó László
Budapest

I. rész

1. *Egy (pozitív számokat tartalmazó) mértani sorozat szomszédos elemeinek különbségét sorban egymás mellé írtuk. Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat is mértani sorozat, ahol $q \neq 1$. Adjuk meg az így kapott mértani sorozat első elemét és hányadosát.* (*11 pont*)

Megoldás. Legyen az eredeti mértani sorozat első eleme a_1, a hányadosa q. Ekkor a sorozat első néhány eleme: a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, a_1q^5, $\ldots$.

A szomszédos elemek különbsége sorban:

$$a_1q-a_1,\quad a_1q^2-a_1q,\quad a_1q^3-a_1q^2,\quad \ldots,\quad a_1q^n-a_1q^{n-1},\quad \ldots .$$

Kiemelünk a_1-et:

$$a_1(q-1),\quad a_1\left(q^2-q\right),\quad a_1\left(q^3-q^2\right),\quad \ldots,\quad a_1\left(q^n-q^{n-1}\right),\quad \ldots .$$

A második elemtől kezdve q is kiemelhető, mindig eggyel növekvő kitevővel:

$$a_1(q-1),\quad a_1q(q-1),\quad a_1q^2(q-1),\quad \ldots,\quad a_1q^{n-1}(q-1),\quad \ldots .$$

Vagyis az így kapott sorozat valóban mértani sorozat.

Az első elem: $a_1(q-1)$, a hányados: q.

2. *a)* *Réka környezetbarát mosógélt árusít* 3 *literes kiszerelésben. Negyvenöt darab színes cédulát tett egy kis kosárba. Ezen cédulák közül tizennyolc „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. A vásárlók egy cédulát húznak a vásárlás előtt, és a rajta levő szövegek alapján ajándékot kapnak a következő sorrendben:* 810 *Ft-os univerzális tisztítószert,* 510 *Ft-os textilöblítőt,* 290 *Ft-os mosogatószert. Ezután a cédulát visszateszik a kosárba.*

Vásárlás előtt László is húz egy cédulát. Mekkora valószínűséggel fog három ajándékot kapni?

Mennyi legyen a mosógél literjének ára, ha a forgalmazó cég átlagosan 535 *Ft-os bevételt szeretne literenként kapni?*

b) Elfelejtettük a telefon bekapcsolásához szükséges négyjegyű kódot. Csak azt tudjuk, hogy négy egymást követő pozitív számjegyből állt, de nem növekedő, és nem csökkenő sorrendben követik egymást a számjegyek. Hány ilyen négyjegyű szám van? (*13 pont*)

Megoldás. *a)* A kis kosárban negyvenöt cédula található, ezek közül csak tizenkettő megfelelő. Azt feltételezhetjük, hogy minden cédula kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, ezért alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt, azaz a kedvező esetek számát elosztjuk az összes eset számával:

$$P(\text{három ajándék})=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}\approx 0{,}27.$$

Legyen a mosógél literenkénti ára x Ft. Ekkor a 3 literes csomag ára $3x$ Ft. Minden vásárló húz egy cédulát, vagyis mindenki kap valamilyen értékben ajándékot, amit a 3 literes csomag árából le kell vonnunk.

Tudjuk, hogy a negyvenöt cédulából tizennyolc „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. Alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség-számítási modellt:

$$P(\text{három ajándék})=\frac{12}{45}=\frac{4}{15},$$
$$P(\text{kettő ajándék})=\frac{15}{45}=\frac{1}{3},$$
$$P(\text{egy ajándék})=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}.$$

A forgalmazó cég átlagosan 1605 Ft bevételt szeretne a 3 literes csomagért.

Tudjuk, hogy egy vásárló $\frac{4}{15}$ valószínűséggel $3x-810-510-290$, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel $3x-810-510$, és $\frac{2}{5}$ valószínűséggel $3x-810$ Ft-ot fizet a 3 literes mosógélért. Vagyis:

$$\frac{4}{15}\cdot(3x-810-510-290)+\frac{1}{3}\cdot(3x-810-510)+\frac{2}{5}\cdot(3x-810)=1605.$$

Az egyenletet rendezve:

$$\begin{aligned}4\cdot(3x-1610)+5\cdot(3x-1320)+6\cdot(3x-810)&=24\,075,\\(12x-6440)+(15x-6600)+(18x-4860)&=24\,075,\\45x-17\,900&=24\,075,\\x&\approx 932{,}8.\end{aligned}$$

Vagyis a mosógél literenkénti ára kerekítve 933 Ft legyen (ekkor a 3 literes kiszerelésű csomagot 2799 Ft-ra lehet beárazni).

b) A lehetséges számjegynégyesek a következők:

$$\begin{matrix}1, & 2, & 3, & 4;\\2, & 3, & 4, & 5;\\3, & 4, & 5, & 6;\\4, & 5, & 6, & 7;\\5, & 6, & 7, & 8;\\6, & 7, & 8, & 9.\end{matrix}$$

Mindegyikből 24 darab négyjegyű szám készíthető, de ezek között kettő nem lesz megfelelő (a növekedő és a csökkenő sorrendűek). Vagyis 132 megfelelő négyjegyű szám van.

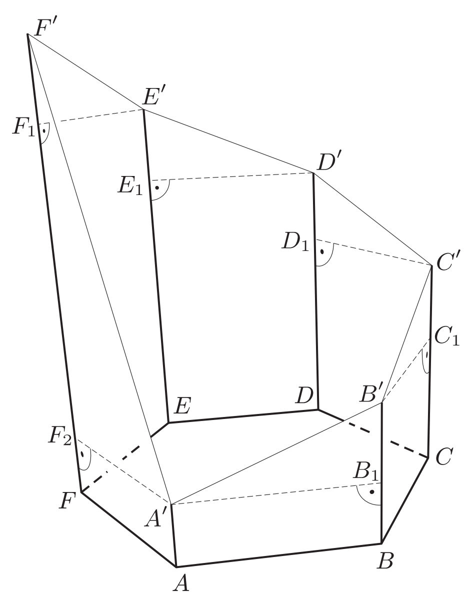
3. *A 6 egység oldalhosszúságú, vízszintes síkban elhelyezkedő $ABCDEF$ szabályos hatszög minden csúcsában, a hatszög síkjára merőlegesen, a síknak ugyanazon az oldalán áll egy-egy szakasz. Ezeknek a szakaszoknak a hossza:*

$$AA'=2,\quad BB'=\frac{9}{2},\quad CC'=7,\quad DD'=\frac{19}{2},\quad EE'=12,\quad FF'=\frac{29}{2}.$$

a) *Milyen hosszú az $A'B'C'D'E'F'$ töröttvonal?*

b) *Határozzuk meg az $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ azon pontpárjait, amelyek pontosan egymás fölött helyezkednek el, majd határozzuk meg az ezen pontpárok közötti távolságokat.*

Megoldás. A szöveg alapján készítettünk egy *vázlatrajzot.*



Az adatok alapján megállapíthatjuk, hogy a következő derékszögű háromszögek egybevágók:

$$\begin{gathered}A'B_1B'\triangle\cong B'C_1C'\triangle\cong C'D_1D'\triangle\cong\\\cong D'E_1\triangle E'\cong\triangle E'F_1F'.\end{gathered}$$

Ezen háromszögek átfogói alkotják a töröttvonal öt darabját. Egy ilyen szakasz hossza a Pitagorasz-tétellel számolva:

$$A'B'=\sqrt{6^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}.$$

A töröttvonal hiányzó darabja, az $A'F'$ is egy derékszögű háromszög átfogója. Az $A'F_2F'$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel:

$$A'F' = \sqrt{6^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{625}{4}} = \frac{\sqrt{769}}{2}.$$

Vagyis a töröttvonal hossza:

$$5 \cdot \frac{13}{2} + \frac{\sqrt{769}}{2} = \frac{65 + \sqrt{769}}{2} \approx 46{,}37.$$

b) Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög középpontja K, az $A'D'$ felezőpontja P_1, a $B'E'$ felezőpontja P_2, a $C'F'$ felezőpontja pedig P_3. Amikor a hatszög síkjára merőlegesen ránézünk, akkor ezt a négy pontot egybeesőnek látjuk. Meghatározzuk a KP_1, KP_2 és KP_3 szakaszok hosszát a szintkülönbségek megállapításához. Ezek a szakaszok rendre az $ADD'A'$, $BEE'B'$, $CFF'C'$ trapézok középvonalai, ezért:

$$\begin{aligned} KP_1 &= \frac{2 + \frac{19}{2}}{2} = \frac{23}{4}, \\ KP_2 &= \frac{\frac{9}{2} + 12}{2} = \frac{33}{4}, \\ KP_3 &= \frac{7 + \frac{29}{2}}{2} = \frac{43}{4}. \end{aligned}$$

Tehát a sorrend a szintkülönbségekkel: a P_3 van a legmagasabban, $\frac{5}{2}$-del alatta helyezkedik el a P_2, és ez alatt található szintén $\frac{5}{2}$-re a P_1.

4. *Tekintsük a következő, általános tagjával adott sorozatot:*

$$a_n = a \cdot n^2 + (2a + b) \cdot n - \left(b^2 - b - a\right).$$

Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok, akkor a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege osztható 5-tel. (*14 pont*)

Megoldás. Legyen az öt egymást követő tag összege: $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$. A sorozat általános tagjára vonatkozó képlet alapján ezt így írhatjuk:

$$\begin{gathered} a \cdot (n-2)^2 + (2a+b) \cdot (n-2) - \left(b^2 - b - a\right) + \\ + a \cdot (n-1)^2 + (2a+b) \cdot (n-1) - \left(b^2 - b - a\right) + \\ + a \cdot n^2 + (2a+b) \cdot n - \left(b^2 - b - a\right) + \\ + a \cdot (n+1)^2 + (2a+b) \cdot (n+1) - \left(b^2 - b - a\right) + \\ + a \cdot (n+2)^2 + (2a+b) \cdot (n+2) - \left(b^2 - b - a\right) = \\ = \left(5n^2 + 10\right) \cdot a + 5n \cdot (2a+b) - 5\left(b^2 - b - a\right) = \\ = 5\left(an^2 + 2a + 2an + bn - b^2 + b + a\right). \end{gathered}$$

A zárójelben álló kifejezés nyilvánvalóan egész.

Vagyis a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege valóban osztható 5-tel.

II. rész

5. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*
a) $2^{3x} - 2^{2x} - 2^{x+1} = 0$;
b) $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Ha kiemelünk az egyenlet bal oldalán 2^x-t, akkor a következő alakban is írhatjuk az egyenletet:

$$2^x \cdot \left[(2^x)^2 - 2^x - 2\right] = 2^x \cdot (2^x - 2) \cdot (2^x + 1) = 0.$$

Azaz három lehetőség adódott a 2^x értékére: 0, 2 és -1.

A 2^x hozzárendelésű exponenciális függvény értékkészlete alapján tudjuk, hogy csak a 2 a lehetséges érték. Ekkor $x = 1$.

Az egyenlet egyedüli megoldása az 1.

b) Használhatjuk a függvénytáblázatban is szereplő addíciós képletek közül az ide megfelelőeket.

$$(\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x)-2\sin x\cos x-\sin x=0,$$
$$2\sin x\cos^2 x+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\sin x-2\sin x\cos x-\sin x=0.$$

Emeljünk ki $\sin x$-et az egyenlet bal oldalán:

$$\begin{aligned}\sin x\left(2\cos^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos x-1\right)&=0,\\ \sin x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos x-1\right)&=0,\\ \sin x\left(3\cos^2 x+\cos^2 x-1-2\cos x-1\right)&=0,\\ \sin x\left(4\cos^2 x-2\cos x-2\right)&=0,\\ \sin x\left(2\cos^2 x-\cos x-1\right)&=0.\end{aligned}$$

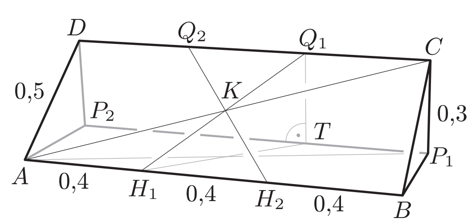
Egy szorzat akkor lesz nulla, ha legalább egy tényezője 0. Két esetet kapunk:
I. $\sin x=0$. Ekkor $x_1=k_1\cdot\pi$, ahol $k_1\in\mathbb{Z}$.
II. $2\cos^2 x-\cos x-1=0$.

$$(\cos x)_1=\frac{1+\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1+3}{4}=1,\qquad (\cos x)_2=\frac{1-\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}.$$

i) $(\cos x)_1=1$. Ekkor $x_2=k_2\cdot 2\pi$, ahol $k_2\in\mathbb{Z}$.
ii) $(\cos x)_2=-\dfrac{1}{2}$. Ekkor $x_3=\dfrac{2\pi}{3}+k_3\cdot 2\pi$, ahol $k_3\in\mathbb{Z}$, $x_4=\dfrac{4\pi}{3}+k_4\cdot 2\pi$, ahol $k_4\in\mathbb{Z}$.
A fenti megoldásokat így is írhatjuk rövidebben: $x_5=k_5\cdot\dfrac{2\pi}{3}$, ahol $k_5\in\mathbb{Z}$, $x_6=\pi+k_6\cdot 2\pi$, ahol $k_6\in\mathbb{Z}$.

6. *Egy* 0,5 méter *széles és* 1,2 méter *hosszú bútorlap hosszabb éle a vízszintes talajra illeszkedik, a vele párhuzamos él pedig* 30 cm *magasságban helyezkedik el.*
a) Mennyi az emelkedési szöge a bútorlap egyik átlóján felfelé haladó hangyának?
b) Mennyit változik ez a szög, ha az alsó él egyik harmadolópontjából a felső él nem szemközti harmadolópontjába igyekszik ez a hangya?
c) Határozzuk meg a két útvonal hajlásszögét. (*16 pont*)

Megoldás. A szöveg alapján készíthetünk egy *vázlatrajzot.* A rajzon szereplő hosszúságokat méterben adtuk meg.



Haladjon a hangya az AC átlón felfelé, ekkor a második útvonal lehet a H_1Q_1 vagy a H_2Q_2. Természetesen ezeknek a szakaszoknak a vízszintessel bezárt szöge egyenlő, csak a *c*) részben lesz fontos, hogy kétféle útvonal is lehetséges.
a) AzABC derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AC=1,3$. A kérdéses emelkedési szög az AP_1C derékszögű háromszög A csúcsánál lévő α hegyesszöggel egyenlő: $\sin\alpha=\dfrac{0,3}{1,3}$, amiből $\alpha\approx 13{,}34°$.
b) A kérdéses emelkedési szög az H_1TQ_1 derékszögű háromszög H_1 csúcsánál lévő β hegyesszöggel egyenlő. A $H_1H_2Q_1$ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétellel $H_1Q_1=\sqrt{0{,}4^2+0{,}5^2}=\sqrt{0{,}41}$. Ekkor a H_1TQ_1 derékszögű háromszögben $\sin\beta=\dfrac{0{,}3}{\sqrt{0{,}41}}$, amiből $\beta\approx 27{,}94°$. A H_2Q_2 harmadolópontokat összekötő szakasz emelkedési szögére ugyanez adódik.
Vagyis $14{,}6°$-kal nagyobb lesz a szög.
c) A hajlásszöget meghatározhatjuk például koszinusztétellel. Mivel a hangya második útja az elsőhöz képest kétféle lehet, azért a *b*) részhez hasonlóan két esetet kell néznünk. Tudjuk, hogy

$$AK=\frac{AC}{2}=\frac{1{,}3}{2}=0{,}65,\quad \text{és}\quad H_1K=H_2K=\frac{H_1Q_1}{2}=\frac{\sqrt{0{,}41}}{2}=\sqrt{0{,}1025}.$$

I. eset: Az AKH_1 háromszög K csúcsánál lévő γ szög a keresett hajlásszögre az egyik lehetőség. Felírjuk az AKH_1 háromszög K csúcsánál lévő γ szögre a koszinusztételt:

$$0{,}4^2 = 0{,}65^2 + \left(\sqrt{0{,}1025}\right)^2 - 2 \cdot 0{,}65 \cdot \sqrt{0{,}1025} \cdot \cos\gamma.$$

Ebből: $\cos\gamma \approx 0{,}8770$, azaz $\gamma \approx 28{,}72°$.

II. eset: Az AKH_2 háromszög K csúcsánál lévő δ szög a keresett hajlásszögre a másik lehetőség (vagy a kiegészítő szöge, ha δ tompaszög). Felírjuk az AKH_2 háromszög K csúcsánál lévő δ szögre is a koszinusztételt:

$$0{,}8^2 = 0{,}65^2 + \left(\sqrt{0{,}1025}\right)^2 - 2 \cdot 0{,}65 \cdot \sqrt{0{,}1025} \cdot \cos\delta.$$

Ebből: $\cos\delta \approx -0{,}2763$, azaz $\delta \approx 106{,}04°$, aminek a kiegészítő szöge $180° - \delta \approx 73{,}96°$.

A két útvonal hajlásszöge kerekítve: vagy $28{,}72°$, vagy $73{,}96°$.

7. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$x - 8 - \frac{560}{x-32} = 19 \cdot \sqrt{\frac{x-8}{x-32}}. \qquad (\textit{16 pont})$$

Megoldás. Meghatározzuk a feladat értelmezési tartományát: $\dfrac{x-8}{x-32} \geq 0$, azaz $x \in \,]-\infty; 8] \cup]32; \infty]$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $(x-32)$-vel, és rendezzük ez egyenletet:

$$(x-8)(x-32) - 19(x-32)\sqrt{\frac{x-8}{x-32}} - 560 = 0.$$

I. eset: Ha $x \in \,]-\infty; 8]$, akkor $x - 32 < 0$, ezért az egyenlet így írható:

$$(x-8)(x-32) + 19\sqrt{(x-8)(x-32)} - 560 = 0.$$

Ez másodfokú egyenlet $\sqrt{(x-8)(x-32)}$-re nézve.

$$\left(\sqrt{(x-8)(x-32)}\right)_1 = \frac{-19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{-19+51}{2} = 16,$$
$$\left(\sqrt{(x-8)(x-32)}\right)_2 = \frac{-19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{-19-51}{2} = -35.$$

Csak a pozitív megoldás jöhet szóba:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-8)(x-32)} &= 16, \\ (x-8)(x-32) &= 256, \\ x^2 - 40x &= 0, \\ x_1 = 0, \quad x_2 &= 40. \end{aligned}$$

A vizsgált intervallumba csak az $x_1 = 0$ esik.

II. eset: Ha $x \in \,]32; \infty]$, akkor $x - 32 > 0$, ezért az egyenlet így írható:

$$(x-8)(x-32) - 19\sqrt{(x-8)(x-32)} - 560 = 0.$$

Ez is másodfokú egyenlet $\sqrt{(x-8)(x-32)}$-re nézve.

$$\left(\sqrt{(x-8)(x-32)}\right)_3 = \frac{19 + \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{19+51}{2} = 35,$$
$$\left(\sqrt{(x-8)(x-32)}\right)_4 = \frac{19 - \sqrt{19^2 + 4 \cdot 560}}{2} = \frac{19-51}{2} = -16.$$

Most is csak a pozitív megoldás jöhet szóba:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-8)(x-32)} &= 35, \\ (x-8)(x-32) &= 1225, \\ x^2 - 40x - 969 &= 0, \\ x_3 = 57, \quad x_4 &= -17. \end{aligned}$$

A vizsgált intervallumba csak az $x_3 = 57$ esik.

Az egyenlet két megoldása az x_1 és az x_3. (Ellenőrzéssel látható, hogy jól számoltunk, ezek valóban megoldásai az egyenletnek.)

8. *Az $A(1;2)$, $B(12;4)$ és $C(4;8)$ csúcsokkal megadott háromszögnek adjuk meg a*

a) súlypontját;

b) legnagyobb szögét;

c) CP^2+CQ^2 értékét, ahol a P pont a C csúcsból induló belső, a Q pont pedig a C csúcsból induló külső szögfelező és az AB oldalegyenes metszéspontja. *(16 pont)*

Megoldás. *a)* Ismert, hogy a súlypont koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepével egyenlő: $S(\frac{1+12+4}{3}; \frac{2+4+8}{3})$, azaz $S(\frac{17}{3}; \frac{14}{3})$.

b) Két pont távolsága meghatározható a pontok koordinátáinak ismeretében:

$$AB = \sqrt{(12-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{125}\,;$$
$$BC = \sqrt{(12-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{80}\,;$$
$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (8-2)^2} = \sqrt{45}\,.$$

Láthatóan: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, így a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a C csúcsnál derékszög van. Vagyis a háromszög legnagyobb szöge $90°$.

c) Alkalmazzuk a belső szögfelező osztásarányára vonatkozó tételt: $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$. Az oldalhosszak ismeretében:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{80}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{3}{4}.$$

Legyen $AP = 3x$, $BP = 4x$. Ezek alapján: $3x + 4x = \sqrt{125}$, amiből $x = \frac{\sqrt{125}}{7}$. Tehát

$$AP = 3 \cdot \frac{\sqrt{125}}{7} = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{7}.$$

Alkalmazzuk a külső szögfelező osztásarányára vonatkozó tételt: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BC}$. Már tudjuk az oldalhosszak ismeretében: $\frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

Legyen $AQ = 3y$, $BQ = 4y$. Ezek alapján: $4y - 3y = \sqrt{125}$, amiből $y = \sqrt{125}$. Tehát $AQ = 3 \cdot \sqrt{125} = 15 \cdot \sqrt{5}$.

Megadható PQ a két szakasz hosszával:

$$PQ = AP + AQ = \frac{15 \cdot \sqrt{5}}{7} + 15 \cdot \sqrt{5} = \frac{120}{7} \cdot \sqrt{5}\,.$$

Mivel PQ az átfogója az PCQ derékszögű háromszögnek (a belső és a külső szög mindig merőleges egymásra), azért $CP^2 + CQ^2 = PQ^2$. Ezek alapján a kérdéses négyzetösszeg:

$$\left(\frac{120}{7} \cdot \sqrt{5}\right)^2 = \frac{120^2 \cdot 5}{49} \approx 1469{,}39.$$

9. *Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:*

a) $$\int_{-1}^{4} \left(x^2 - 2x + 2\right) dx;$$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x)\, dx;$$

c) $$\int_{1}^{2} \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx;$$

d) $$\int_{0}^{1} (2x+1)^4\, dx.$$

Megoldás.

$a)$

$$\int_{-1}^{4} \left(x^2 - 2x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{4} =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot \frac{4^2}{2} + 2 \cdot 4\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \cdot \frac{(-1)^2}{2} - 2\right) = \frac{50}{3}.$$

$b)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{2} + \sin \pi\right) - \left(\frac{(-\pi)^2}{2} + \sin(-\pi)\right) =$$

$$= \sin \pi - \sin(-\pi) = 0.$$

$c)$

$$\int_{1}^{2} \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx = \left[e^x - \ln |x|\right]_1^2 = \left(e^2 - \ln 2\right) - (e - \ln 1) = e^2 - e - \ln 2.$$

$d)$

$$\int_{0}^{1} (2x+1)^4\, dx = \int_{0}^{1} \left(16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1\right) dx =$$

$$= \left[16 \cdot \frac{x^5}{5} + 32 \cdot \frac{x^4}{4} + 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1$$

$$= \frac{16}{5} + 8 + 8 + 4 + 1 = \frac{121}{5}.$$