Megoldásvázlatok a 2013/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Ratkó Éva és **Schmieder László**
Budapest

I. rész

1. *Hány olyan különböző téglatest van, amelyre teljesül, hogy éleinek hossza egész szám, térfogata* 15 000 *egység, és a három él hosszának legnagyobb közös osztója* 5?

(*12 pont*)

Megoldás. Az élek hosszának legnagyobb közös osztója 5. Vagyis a három él hossza $5a$, $5b$ és $5c$, ahol $(a,b,c)=1$. Mivel $\frac{15\,000}{5^3}=120$, azért $abc=120$. Tehát az a kérdés, hogy hány olyan a, b, c pozitív egész szám van, amelyek legnagyobb közös osztója 1, szorzata 120, és mivel a számok sorrendjétől eltekintünk, azért $a\le b\le c$.

Tudjuk, hogy $120=2^3\cdot 3\cdot 5$.

Ha $a=1$, akkor $bc=120$, és mivel 120 osztóinak száma $d(120)=4\cdot 2\cdot 2=16$, és 120 nem négyzetszám, azért ekkor $\frac{16}{2}=8$ megfelelő számhármas van.

Ha $a=2$, akkor $bc=60$, és már csak a $b,c\ge 2$, $b\le c$ eseteket keressük. Ha b és c is osztható lenne 2-vel, akkor $(a,b,c)=2$ lenne. Tehát csak az egyikük osztható 2-vel, sőt, ezek szerint 4-gyel. Tehát az egyik lehetőség, hogy $b=2^2\cdot b'$ és ekkor $b'c=15$. Ez csak úgy lehet, ha $b=4$ és $c=15$. A másik lehetőség, hogy $c=4\cdot c'$, ekkor $b=3$, $c=20$ vagy $b=5$ és $c=12$. Tehát 3 ilyen megfelelő számhármas van.

Ha $a=3$, akkor $bc=40=2^3\cdot 5$, $b,c\ge 4$, $b\le c$. Ekkor $b=4$, $c=10$ vagy $b=5$, $c=8$.

Ha $a=4$, akkor az egyetlen megoldás $b=5$ és $c=6$.

Több lehetőség nincs, hiszen $5^3>120$.

Tehát összesen $8+3+2+1=14$ megfelelő téglatest van.

2. *Oldjuk meg az következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $\sqrt{x-\sqrt{x+2}}=2$;

b) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=\log_{16} x^3$. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlet alaphalmaza az $x\ge\sqrt{x+2}$ és az $x+2\ge 0$ egyenlőtlenségekből számítható. Az elsőből egyrészt $x\ge 0$, másrészt $x^2-x-2\ge 0$ adódik, azaz $x\in[2;+\infty[$. A második egyenlőtlenség megoldása $x\in[-2;+\infty[$. Az alaphalmaz tehát a $[2;+\infty[$ intervallum.

A megoldáshoz emeljük négyzetre és rendezzük az egyenletet:

$$x-\sqrt{x+2}=4,$$
$$x-4=\sqrt{x+2}.$$

Látható, hogy csak $x\ge 4$ esetén lehet megoldást találni. Újabb négyzetre emelés és rendezés után

$$x^2-9x+14=0,$$

amiből $x_1=7$ és $x_2=2$. Mivel a második gyök kisebb 4-nél, azért nem megoldás. A 7 benne van az alaphalmazban, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk a helyességéről, így az egyenlet egyetlen megoldása $x_1=7$.

b) Az egyenlet alaphalmaza a pozitív valós számok halmaza. Hozzuk közös, 2-es alapra a logaritmusokat:

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\frac{\log_2 x}{\log_2 8}=\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16}.$$

A nevezők kiszámítása és a logaritmus argumentumában lévő hatványra vonatkozó azonosság alapján a

$$\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2}+\frac{\log_2 x}{3}=\frac{3\cdot\log_2 x}{4}$$

egyenletet kapjuk. Rendezve:

$$12\log_2 x+6\log_2 x+4\log_2 x=9\log_2 x,$$
$$22\log_2 x=9\log_2 x,$$

azaz $13\log_2 x=0$. Mivel az $x\mapsto\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő, és $x=1$-nél értéke zérus, azért az $x=1$ a kapott egyenlet egyetlen megoldása.

Mivel az 1 benne van az eredeti egyenlet alaphalmazában, és végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, azért az eredeti egyenlet megoldása: $x=1$.

3. *Családunk szokásait megfigyelve annak a valószínűsége, hogy egy nyári délután sétálni megyünk* 0,6. *Ha otthon maradunk, akkor* 0,25 *annak a valószínűsége, hogy fagyizunk. Annak a valószínűsége, hogy fagyizunk* 0,2. *Mennyi egy nyári délután annak a valószínűsége, hogy*

a) otthon maradunk és fagyizunk;

b) sétálunk és fagyizunk;

c) fagyizunk, ha sétálni megyünk? (*13 pont*)

Megoldás. Jelölje S azt az eseményt, hogy sétálni megyünk, F pedig azt az eseményt, hogy fagyizunk. Ekkor nyilván $\overline{S}=$ otthon maradunk és $\overline{F}=$ nem fagyizunk.

a) A feladat szövege szerint a következő valószínűségeket tudjuk: $P(S)=0{,}6$, $P(F|\overline{S})=0{,}25$, $P(F)=0{,}2$. Ezekből $P(\overline{S})=1-P(S)=0{,}4$ és $P(\overline{F})=1-P(F)=0{,}8$.

A feltételes valószínűség definíciója alapján $P(F|\overline{S})=\dfrac{P(F\overline{S})}{P(\overline{S})}$, amiből $P(F\overline{S})=$ $=0{,}25\cdot 0{,}4=0{,}1$.

Annak a valószínűsége, hogy otthon maradunk és fagyizunk 0,1.

b) Mivel $P(F)=P(F\overline{S})+P(FS)$, azért $P(FS)=0{,}2-0{,}1$, azaz annak a valószínűsége, hogy sétálunk és fagyizunk 0,1.

c)

$$P(F|S)=\frac{P(FS)}{P(S)}=\frac{0{,}1}{0{,}6}=\frac{1}{6}.$$

4. *Adott az $f: x\mapsto x^3$ függvény. a) Adjuk meg az f függvénygörbe azon érintőinek egyenletét, amelyek meredeksége* 12.

b) Számítsuk ki az érintési pontok egymástól való távolságát.

c) Állapítsuk meg, hogy milyen távol vannak egymástól az érintők. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) $f'=3x^2$, mely akkor lesz 12, ha $x=\pm 2$. Az érintési pontok tehát $E_1\big(-2;(-2)^3\big)$ és $E_2\big(2;2^3\big)$, vagyis $E_1(-2;-8)$ és $E_2(2;8)$.

Az érintők egyenlete $e_1: y=12x+16$ és $e_2: y=12x-16$.

b) A két pont távolsága: $d(E_1E_2)=\sqrt{4^2+16^2}=4\sqrt{17}$.

c) Mivel a feladatban szereplő függvénygörbe páratlan fokszámú origón átmenő polinom, azért szimmetrikus az origóra. Ebből következik, hogy a két adott meredekségű érintője is szimmetrikus az origóra. A két egyenes távolsága ezért számolható úgy, hogy az egyik egyenes és az origó távolságát megduplázzuk. Írjuk föl tehát az egyenesekre merőleges, origón átmenő egyenest: $y=-\dfrac{1}{12}x$. Ennek és e_1-nek metszéspontja $P\big(\dfrac{-192}{145};\dfrac{16}{145}\big)$. Tehát a keresett távolság:

$$d=2\overline{PO}=2\sqrt{\left(\frac{-192}{145}\right)^2+\left(\frac{16}{145}\right)^2}=\frac{\sqrt{148\,480}}{145}\approx 2{,}6575.$$

Megjegyzés: A *c*) résznél pont és egyenes távolságának képletével gyorsabban is célhoz érhetünk. Ehhez e_1 egyenletét írjuk a következő alakba: $0=12x-y+16$. A két érintő távolsága megegyezik $E_2(2;8)$ és e_1 távolságával.

$$d=\left|\frac{12\cdot 2-1\cdot 8+16}{\sqrt{12^2+(-1)^2}}\right|=\frac{32}{\sqrt{145}}\approx 2{,}6575.$$

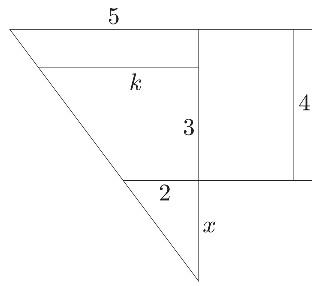
II. rész

5. *Egy golyót beletettünk egy olyan edénybe, amelynek a belső része csonkakúp alakú, és 3 cm magasságig volt vízzel töltve. Miután a golyót belehelyeztük, a víz éppen nem folyt ki az edényből. A csonkakúp alapkörének és fedőkörének sugara rendre* 2, *illetve* 5 *cm, magassága pedig* 4 *cm. Mekkora a golyó sugara, ha magasságának* $\dfrac{2}{3}$ *részéig merül bele a vízbe?* (*16 pont*)

Megoldás. Tekintsük az *ábrát.* A hasonlóság miatt egyrészt $\dfrac{2}{5}=\dfrac{x}{x+4}$, amiből $x=\dfrac{8}{3}$ cm. Másrészt $\dfrac{2}{k}=\dfrac{x}{x+3}$, ahonnan $k=4{,}25$ cm.

Az 1 cm magasságú, 5 cm, illetve 4,25 cm alapkörű csonkakúp térfogata

$$V_{\text{csk}}=\frac{\pi}{3}\cdot\left[1\cdot\left(5^2+4{,}25^2+5\cdot 4{,}25\right)\right]=\frac{64{,}3125\pi}{3}\ \left(\text{cm}^3\right).$$



Ez a térfogat egyenlő egy olyan gömbszelet térfogatával, melynek sugara a keresett r sugár, magassága pedig $m = \frac{2}{3} \cdot 2r = \frac{4}{3}r$, mivel a golyó a magassága $\frac{3}{4}$ részéig merül a vízbe.

$$V_{\text{gsz}} = \frac{\pi}{3}m^2(3r - m) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}r\right)^2 \cdot \left(3r - \frac{4}{3}r\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{80}{27} \cdot r^3 = \frac{64{,}3125\pi}{3}\ (\mathrm{cm}^3),$$

amiből $r \approx 2{,}7895$ cm. Tehát a golyó sugara 2,7895 cm.

6. *Az Újpesti Fa- és Fémipari Szakiskola új épületében* 1927*-ben kezdődött meg a tanítás. Az iskola egy ötszögű telekre épült, melyről a helytörténeti újság a következőket írja: „A Görgey út és a Szent Imre utca* $49{,}4°$*-os szöget zár be egymással, egyenes vonalú* 229 *m -es és* 195 *m -es telekmérettel. A Corvin utcai telekhatár* $44{,}1°$*-os szögben törik a Görgey út felé* 104 *m hosszon, majd homorú szögben* 49 *m-en északi irányt vesz és innen egy rövid szakaszon zárul a Szent Imre utcai telekhatár végpontjához." Tudjuk még, hogy a Görgey út* $+2{,}9°$*-os szöget zár be a K-Ny-i iránnyal, és a telek délnyugati sarokpontja a Görgey út és a Corvin utca kereszteződése. Számítsuk ki a telek területét.* (*16 pont*)

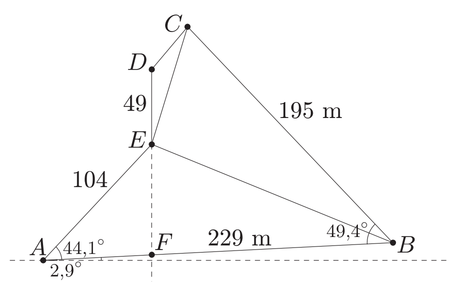
Megjegyzés. A feladat megfogalmazása nem volt egyértelmű. A megoldás a valódi telekkel számol. Természetesen elfogadható minden további helyes értelmezés.

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tekintsünk először az ABE háromszöget. Írjuk fel rá a koszinusztételt:

$$EB^2 = 104^2 + 229^2 - 2 \cdot 104 \cdot 229 \cdot \cos 44{,}1°,$$

amiből $EB \approx 170{,}44$ m. Ugyanebben a háromszögben a szinusztételt felírva:

$$\frac{\sin ABE\sphericalangle}{\sin 44{,}1°} = \frac{104}{170{,}44}.$$



Mivel $ABE\sphericalangle < 49{,}4°$, azért ebből $ABE\sphericalangle \approx 25{,}13°$ következik.

Az EBC háromszögben $CBE\sphericalangle = ABC\sphericalangle - ABE\sphericalangle = 24{,}27°$. A koszinusztételt felírva:

$$EC^2 = 170{,}44^2 + 195^2 - 2 \cdot 170{,}44 \cdot 195 \cdot \cos 24{,}27°,$$

amiből $EC \approx 80{,}49$ m. Írjuk fel a koszinusztételt az EBC háromszögre:

$$195^2 = 80{,}49^2 + 170{,}44^2 - 2 \cdot 80{,}49 \cdot 170{,}44 \cdot \cos CEB\sphericalangle.$$

Ebből $\cos CEB\sphericalangle \approx -0{,}090\,99$, és így $CEB\sphericalangle \approx 95{,}22°$.

Mivel $EFB\sphericalangle = 90° - 2{,}9° = 87{,}1°$, azért $BEF\sphericalangle \approx 180° - 25{,}13° - 87{,}1° = 67{,}77°$. Innen $CED\sphericalangle = 180° - BEF\sphericalangle - CEB\sphericalangle \approx 17{,}01°$.

A telek területe:

$$\begin{aligned} T &= t_{ABE} + t_{EBC} + t_{ECD} = \\ &= \frac{1}{2}(104 \cdot 229 \cdot \sin 44{,}1° + 195 \cdot 170{,}44 \cdot \sin 24{,}27° + 49 \cdot 80{,}49 \cdot \sin 17{,}01°) \approx \\ &\approx 15694{,}39\ (\mathrm{m}^2). \end{aligned}$$

7. *Tekintsünk egy 6 pontú teljes gráfot.*
a) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör van ebben a gráfban?
b) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör lesz benne, ha egy élet elhagyunk?
(*16 pont*)

Megoldás. *a*) 3 csúcsú: $\binom{6}{3} = 20$, mert 3 csúcshoz csak egy kör tartozik. 4 csúcsú: $\binom{6}{4} \cdot \frac{4!}{4 \cdot 2} = 15 \cdot 3 = 45$, mert 4 csúcs esetén 4!-féleképp választhatjuk ki a csúcsok sorrendjét, de mindegy, hogy melyik csúcs az első (osztunk 4-gyel), illetve a csúcsok egy adott sorrendje esetén a fordított sorrend ugyanazt a kört adja (osztunk 2-vel).

Hasonló gondolatmenettel az 5 csúcsú körök száma $\binom{6}{5} \cdot \frac{5!}{5 \cdot 2} = 6 \cdot 12 = 72$, a 6 csúcsúaké pedig $\binom{6}{6} \cdot \frac{6!}{6 \cdot 2} = 1 \cdot 60 = 60$.

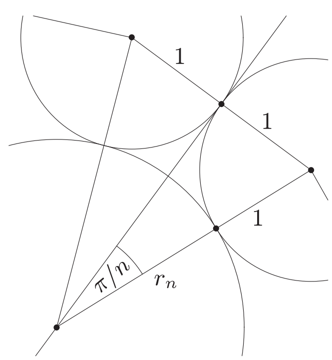
b) Nézzük meg, hogy hány körrel lesz kevesebb az él elhagyása miatt az egyes esetekben. Azokat a köröket hagytuk el, amelyeknek az egyik éle a kiválasztott él, a többi csúcs pedig a másik négy csúcsból volt kiválasztva. 3 csúcs esetén: a maradék 4 csúcsból kell választani 1-et, ez $\binom{4}{1} = 4$ lehetőség. 4 csúcs esetén: $\binom{4}{2} \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ kör, mivel az adott él egyik csúcsát kiválasztva, ahhoz 2 csúcsot választhatunk stb. 5 csúcs esetén: $\binom{4}{3} \cdot 3! = 4 \cdot 6 = 24$ kör, 6 csúcs esetén pedig $\binom{4}{4} \cdot 4! = 1 \cdot 24 = 24$ kör. Tehát a körök száma rendre $20 - 4 = 16$, $45 - 12 = 33$, $72 - 24 = 48$ és $60 - 24 = 36$.

8. *Egy szabályos, két egység oldalú n-szög ($n \geq 3$) mindegyik csúcsa, mint középpont köré egység sugarú kört írunk.*
a) Adjuk meg n függvényében annak a körnek az r_n sugarát, amely a sokszög csúcsába írt körök mindegyikét érinti a sokszög belsejében.
b) Milyen n értékekre lesz r_n értéke 2013-nál nagyobb? (*16 pont*)

Megoldás. A kör középpontját a sokszög csúcsával összekötő szakasz hossza egyenlő a két kör sugarának összegével, vagyis $(r_n + 1)$-gyel.

$r_n =$

a) Az *ábrán* látható derékszögű háromszögből $\frac{1}{r_n + 1} = \sin\frac{\pi}{n}$, ahonnan



b)

$$r_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} - 1 > 2013,$$
$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} > 2014,$$
$$\sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{2014}.$$

Mivel $\frac{\pi}{n} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, azért

$$\frac{\pi}{n} < 0{,}000\,496\,52,$$
$$n > \frac{\pi}{0{,}000\,496\,52} \approx 6327{,}22.$$

Tehát $n \geq 6328$ esetén lesz r_n értéke 2013-nál nagyobb.

9. *Egy bergengóc egyetemi hallgató tanulmányai 3 évében diákhitelt vett föl. Az első tanév szeptemberétől minden hónap első napján 25 000 Ft-ot kapott. A kamatszámítás havonta történik időarányos (lineáris) kamatszámítás szerint, vagyis a bank a havi kamat összegét a* $\frac{t \cdot k}{12}$ *képlet alapján számítja ki, ahol* t *a tőketartozás, és* k *az aktuális éves kamatláb. A tárgyévben meg nem fizetett kamat tőkésítésére évente, december 31-i értéknappal kerül sor. Tegyük föl, hogy a hitel felvétele és visszafizetése alatt a kamatláb végig 9%.*

a) Mekkora a végzett diák tőketartozása a tanulmányok befejezését követő hónap (július) első napján?

b) A diák a tanulmányok befejezését követő szeptember első napjától a tartozás teljes kiegyenlítéséig minden hónapban 25 000 Ft-tal (illetve az utolsó hónapban a fennmaradó összeggel) törleszti felvett hitelét. A havonta törlesztett összeg először csak a felgyűlt kamatokat csökkenti, majd azok elfogyása után minden hónapban a tőketartozást is. Hány hónapig tart így a teljes hitel visszafizetése? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az első naptári év utolsó napján a tőketartozás 100 000 Ft. Az ezen időszakban felgyűlt kamat

$$(4+3+2+1)\cdot\frac{0{,}09}{12}\cdot 25\,000 = 1875 \text{ Ft.}$$

A következő naptári évben a tőketartozás 101 875 Ft-ról indul, az év utolsó napján 300 000 Ft-tal több, tehát 401 875 Ft. Az ebben az évben felszámolt kamat

$$(12+11+\ldots+1)\cdot\frac{0{,}09}{12}\cdot 25\,000 + 101\,875\cdot 0{,}09 = 23\,794 \text{ Ft.}$$

A harmadik naptári év elején a tőketartozás 425 669 Ft, év végén pedig 725 669 Ft. Az ebben az évben felgyűlt kamat 52 935 Ft.

A negyedik naptári év elején a tőketartozás 778 604 Ft, július első napján pedig 928 604 Ft.

b) A negyedik naptári év első félévében felgyűlt kamat 38 975 Ft. A következő két hónapban ehhez még hozzájön 13 939 Ft kamat, ami így összesen 52 904 Ft.

A következő három hónapban a kamat mindig 6965 Ft, a törlesztés pedig 25 000 Ft. Így november végére az addig felgyűlt kamatot kifizeti és még a tőketartozásból is törleszt 1202 Ft-ot.

December 1-jén a tőketartozás 927 402 Ft. Ezután minden hónapban kifizeti a kamatot és a tőketartozásból is törleszt. n hónap eltelte után a tőketartozás:

$$\left(\ldots\left\{\left[927\,402\cdot\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)-25\,000\right]\cdot\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)-25\,000\right\}\ldots\right).$$

Akkor fizeti vissza a diák a kölcsönt, ha ez az érték nem pozitív. Ebből a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$927\,402\cdot 1{,}0075^n - 25\,000\cdot\left(1{,}0075^{n-1}+1{,}0075^{n-2}+\ldots+1{,}0075+1\right)\le 0.$$

Ebből a mértani sorozat összegképletének felhasználásával:

$$\begin{aligned}
927\,402\cdot 1{,}0075^n - 25\,000\cdot\frac{1{,}0075^n-1}{1{,}0075-1} &\le 0,\\
0{,}278\,220\,6\cdot 1{,}0075^n - (1{,}0075^n-1) &\le 0,\\
-0{,}727\,794\cdot 1{,}0075^n + 1 &\le 0,\\
1{,}3740 &\le 1{,}0075^n,\\
\lg 1{,}3740 &\le n\lg 1{,}0075,\\
42{,}522 &\le n.
\end{aligned}$$

Tehát $3+42=45$ hónapig kell 25 000 Ft-ot fizetni, az utolsó hónapban ennél kevesebbet, vagyis 46 hónap a teljes visszafizetés ideje.