

# Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László

## I. rész

1. Egy (pozitív számokat tartalmazó) mértani sorozat szomszédos elemeinek különbségét sorban egymás mellé írtuk. Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat is mértani sorozat, ahol  $q \neq 1$ . Adjuk meg az így kapott mértani sorozat első elemét és hányadosát. (11 pont)

2. a) Réka környezetbarát mosógélt árusít 3 literes kiszerelesben. Negyvenöt darab színes cédulát tett egy kis kosárba. Ezen cédulák közül tizenhét „egy ajándék”, tizenöt „két ajándék”, és tizenkettő „három ajándék” szöveget tartalmaz. A vásárlók egy cédulát húznak a vásárlás előtt, és a rajta levő szövegek alapján ajándékot kapnak a következő sorrendben: 810 Ft-os univerzális tisztítószert, 510 Ft-os textilöblítőt, 290 Ft-os mosogatószert. Ezután a cédulát visszateszik a kosárba.

Vásárlás előtt László is húz egy cédulát. Mekkora valószínűséggel fog három ajándékot kapni?

Mennyi legyen a mosógél literjének ára, ha a forgalmazó cég átlagosan 535 Ft-os bevételt szeretne literenként kapni?

b) Elfelejtettük a telefon bekapcsolásához szükséges négyjegyű kódot. Csak azt tudjuk, hogy négy egymást követő pozitív számjegyből állt, de nem növekedő, és nem csökkenő sorrendben követik egymást a számjegyek. Hány ilyen négyjegyű szám van? (13 pont)

3. A 6 egység oldalhosszúságú, vízszintes síkban elhelyezkedő  $ABCDEF$  szabályos hatszög minden csúcsában, a hatszög síkjára merőlegesen, a síknak ugyanazon az oldalán áll egy-egy szakasz. Ezeknek a szakaszoknak a hossza:

$$AA' = 2, \quad BB' = \frac{9}{2}, \quad CC' = 7, \quad DD' = \frac{19}{2}, \quad EE' = 12, \quad FF' = \frac{29}{2}.$$

a) Milyen hosszú az  $A'B'C'D'E'F'$  töröttvonal?

b) Határozzuk meg az  $A'D'$ ,  $B'E'$ ,  $C'F'$  azon pontpárjait, amelyek pontosan egymás fölött helyezkednek el, majd határozzuk meg az ezen pontpárok közötti távolságokat. (13 pont)

4. Tekintsük a következő, általános tagjával adott sorozatot:

$$a_n = a \cdot n^2 + (2a + b) \cdot n - (b^2 - b - a).$$

Mutassuk meg, hogy ha  $a$  és  $b$  egész számok, akkor a sorozat bármely öt egymást követő tagjának összege osztható 5-tel. (14 pont)

## II. rész

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a)  $2^{3x} - 2^{2x} - 2^{x+1} = 0$ ;

b)  $\sin 3x - \sin 2x - \sin x = 0$ . (16 pont)

6. Egy 0,5 méter széles és 1,2 méter hosszú bútorlap hosszabb éle a vízszintes talajra illeszkedik, a vele párhuzamos él pedig 30 cm magasságban helyezkedik el.

a) Mennyi az emelkedési szöge a bútorlap egyik átlóján felfelé haladó hangyának?

b) Mennyit változik ez a szög, ha az alsó él egyik harmadolópontjából a felső él nem szemközti harmadolópontjába igyekszik ez a hangya?

c) Határozzuk meg a két útvonal hajlásszögét. (16 pont)

7. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x - 8 - \frac{560}{x - 32} = 19 \cdot \sqrt{\frac{x - 8}{x - 32}}. \quad (16 \text{ pont})$$

8. Az  $A(1; 2)$ ,  $B(12; 4)$  és  $C(4; 8)$  csúcsokkal megadott háromszögnek adjuk meg a
- súlypontját;
  - legnagyobb szögét;
  - $CP^2 + CQ^2$  értékét, ahol a  $P$  pont a  $C$  csúcsból induló belső, a  $Q$  pont pedig a  $C$  csúcsból induló külső szögfelező és az  $AB$  oldalegyenes metszéspontja.

(16 pont)

9. Határozzuk meg a következő határozott integrálok értékét:

a)  $\int_{-1}^4 (x^2 - 2x + 2) dx;$

b)  $\int_{-\pi}^{\pi} (x + \cos x) dx;$

c)  $\int_1^2 \left( e^x - \frac{1}{x} \right) dx;$

d)  $\int_0^1 (2x + 1)^4 dx.$

(16 pont)